DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2003.04.002
广西科学 Guangxi Sciences 2003, 10 (4): 244~ 248, 252

232规则元胞自动机的稳定性*
The Stability of Cellular Automata with Rule 232

邓 婷　易 忠　邓培民
Deng Ting　Yi Zhong　Deng Peimin

(广西师范大学数学与计算机科学学院　桂林市育才路3号　541004)
(Coll. of Math.& Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　研究满足三重局部变换规则—— 232规则的一维有限元胞自动机分别在固定边界条件和周期边界条件下的稳定性,刻划了该类元胞自动机中不动点的个数及它们的瞬时长度.

关键词　元胞自动机　稳定性　固定边界条件　周期边界条件　不动点
中图法分类号　TP301.1; O158

Abstract　The stability of one-dimentional finite Cellular Automate with triplet local transition rule 232 were dealt with, and boundary conditions or cyclic boundary conditions were respectively fixed. The formulae of the number of fixed points and transient length were found.

Key words　cellular automata, stability, fixed boundary condition, cyclic boundary condition, fixed point

元胞自动机 (Cellular Automata, 以下简称 CA)是由大量简单一致的元素通过局部联系组成的时间、空间变量均离散的系统.它最早由 Von Neuman等人提出来,当初主要用于模拟生命系统的自复制功能[1]. 近20年来,许多学者对 CA的行为进行研究并应用到数学、物理、生物和计算机科学等领域. 对元胞自动机的研究,主要是研究它们的行为,即它们在演化过程中的性态. Y. Kawahara研究了满足线性90规则的2维 CA[2]; H. Lee和 Y. Kawahara研究了满足线性60规则的一维 CA[3]; T. Sato讨论了27规则非线性 CA[4]; Shuichi INOKUCHI讨论了156规则[5]、14规则和142规则非线性 CA[6]. 232规则的一维 CA即满足"少数服从多数"演化规律的 CA. 它们能刻划和描述许多现实世界的实际情况. 本文主要研究232规则一维 CA的行为,对它们的稳定性、不动点个数和瞬时长度进行了具体刻划.

1　基本概念与记号

一个 CA是一个动态系统 (X, f),其中 X是位形集,f是变换函数. 一个 CA是一维的,如果它的位形中的细胞是呈线性排列的. 关于 CA的概念及性质,参见文献 [1].

定义 1　设 $\{1, 2, \cdots, m\}$是 m个细胞的集合,向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$,其中 $x_i \in \{0, 1\}$,称为一个位形,并称所有位形构成的集合为位形集.

一般用序列 $x_1x_2\cdots x_m$ 表示位形 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$.

定义 2　函数 $f: \{0, 1\}^3 \to \{0, 1\}$称为一个三重局部变换规则,如果 f可以表现为以下形式:

$$\begin{pmatrix} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ r_7 & r_6 & r_5 & r_4 & r_3 & r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix}$$

其中,$r_i = f(xyz)$,且 $i = 2^2x + 2^1y + 2^0z$,而且 f的规则数 R定义为:

$$R = 2^7r_7 + 2^6r_6 + \cdots + 2^0r_0.$$

例如,设三重局部变换规则 f为:

$$\begin{pmatrix} 111 & 110 & 101 & 100 & 011 & 010 & 001 & 000 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则它的规则数为 $2^7\times 1 + 2^6\times 1 + 2^5\times 1 + 2^4\times 0 + 2^3\times 1 + 2^2\times 0 + 2^1\times 0 + 2^0\times 0 = 232$.

显然,规则 232可看作"少数服从多数" 的规则,即当 xyz含有 2个或 2个以上的 1(或 0)时,$f(xyz) = 1$(或 0).

定义 3　设函数 $\Psi: \{0, 1\}^m \to \{0, 1\}^m$ 定义为:

$$\Psi(x_1, x_2\cdots x_m) = (f(T, x_1, x_2), f(x_1, x_2, x_3), \cdots, f(x_{n-1}, x_n, U)),$$

式中,f是三重局部变换规则,$T, U, x_i \in \{0, 1\}$,称 Ψ为全域变换函数.

2003-02-24收稿, 2003-03-26修回。
* 国家自然科学基金 (10271021, 60075016), 广西自然科学基金 (0135005), 教育部优秀青年教师资助计划 (2002-40), 广西十百千人才基金资助。

一般称(α,β)为边界条件,边界条件(α,β)是周期的当且仅当对位形 $x=x_1x_2\cdots x_m$,有 $\alpha=x_m,\beta=x_1$,边界条件(α,β)是固定的当且仅当α,β都是固定的.特别有,当$\alpha=a,\beta=b$时,称边界条件为$a-b$.

通常把包含m个细胞,满足规则R和边界条件(α,β)的一维CA记为$CA-R_{\alpha-\beta}(M)$.

定义 4 设x是$CA-R_{\alpha-\beta}(M)$的一个位形,若存在正整数s,使得$W^s(x)=x$,记$T=\min\{s\geqslant 1|W^s(x)=x\}$,则称$x$位于一个周期长度为$T$的循环上.若位形$x(1),x(2),\cdots,x(T)$互不相同且满足$x(i+1)=W(x(i)),x(T+1)=x(1)$,其中$1\leqslant i\leqslant T$,则称$x(1),x(2),\cdots,x(T)$作成一个周期长度为$T$的有限循环,记为$T$-循环.

特别有,周期长度为1的有限循环称为一个不动点.记$V_T(m)$为$CA-R_{\alpha-\beta}(M)$中T-循环的个数.

定义 5 设x是$CA-R_{\alpha-\beta}(m)$的一个位形,若存在正整数s,使得$W^s(x)$是一个不动点,则称x可稳定.满足条件最小的s称为x的稳定步数.

这里定义不动点的稳定步数为0.

定义 6 设$x=x_1x_2\cdots x_m$是$CA-R_{\alpha-\beta}(m)$的一个位形,若x的子序列$x_i\cdots x_{i+l}$满足,对任一正整数s,$e=W^s(x)=e_1e_2\cdots e_m$,有$x_i\cdots x_{i+l}=e_i\cdots e_{i+l}$,则称$x_i\cdots x_{i+l}$为$x$的不动子序列.若存在$s$,使得$e=W^s(x)=e_1e_2\cdots e_m$中的子序列$e_i\cdots e_{i+l}$为$e$的不动子序列,则称$x_i\cdots x_{i+l}$为$x$的可稳定子序列,满足以上条件最小的$s$称为$x_i\cdots x_{i+l}$的稳定步数.

定义 7 一个位形x的高度$h(x)$定义为$h(x)=\min\{s\geqslant 0|W^s(x)$在一个有限循环上$\}$,$CA-R_{\alpha-\beta}(m)$的瞬时长度定义为:$H(m)=\max\{h(x)|x$是$CA-R_{\alpha-\beta}(m)$的位形$\}$.

2 满足固定边界条件的 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$

这部分讨论当(α,β)为固定边界条件时,$CA-232_{\alpha-\beta}(m)$的稳定性,不动点的个数及瞬时长度.

引理 1 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$的位形c是不动点当且仅当$\alpha c\beta$不包含子序列101与010.

证明 ($\Rightarrow$) 假设$\alpha c\beta$包含子序列$x_{i-1}x_ix_{i+1}=101$或010,其中$1\leqslant i\leqslant m$,$x_0=\alpha,x_{m+1}=\beta$.由于$f(101)=1,f(010)=0$,与c为不动点矛盾,故$\alpha c\beta$不包含子序列101与010.

($\Leftarrow$) 由于当$xyz\neq 101,010$时,$f(xyz)=y$,从而$\alpha c\beta$不包含子序列101与010时,c为不动点.

由引理1易得$CA-232_{\alpha-\beta}(m)$的所有不动点.

推论 1 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$的所有不动点为

$0^{i_1}1^{j_1}0^{i_2}1^{j_2}\cdots 0^{i_n}1^{j_n}$,

其中$\sum_{k=1}^{n}(i_k+j_k)=m,i_1\geqslant 0,i_k>0,(k=2,\cdots,n)$;$j_k>0,(k=1,\cdots,n-1),j_n\geqslant 0$,且满足

(1) $\alpha=0,\beta=0$时,$j_k\geqslant 2,(k=1,\cdots,n-1)$;$i_k\geqslant 2,(k=2,\cdots,n-1)$;若$j_n>0$,则$j_n\geqslant 2$且$i_n\geqslant 2$;

(2) $\alpha=0,\beta=1$时,$j_k\geqslant 2,(k=1,\cdots,n-1)$;$i_k\geqslant 2,(k=2,\cdots,n)$;

(3) $\alpha=1,\beta=0$时,$j_k\geqslant 2,(k=2,\cdots,n-1)$;$i_k\geqslant 2,(k=2,\cdots,n-1)$;若$i_1>0$,则$i_1\geqslant 2$且$j_1\geqslant 2$;若$j_n>0$时,$j_n\geqslant 2$且$i_n\geqslant 2$;

(4) $\alpha=1,\beta=1$时,$j_k\geqslant 2,(k=2,\cdots,n-1)$;$i_k\geqslant 2,(k=2,\cdots,n)$;若$i_1>0$,则$i_1\geqslant 2$且$j_1\geqslant 2$.

引理 2 设c,d是$CA-232_{\alpha-\beta}(m)$的位形,且$d=W(c)$,若存在$c_ic_{i+1}\cdots c_{i+k}=a^{k+1},(k\geqslant 1)$,则$d_id_{i+1}\cdots d_{i+k}=a^{k+1}$,其中$a\in\{0,1\}$.

证明 显然成立.

引理 3 设c,d是$CA-232_{\alpha-\beta}(m)$的位形,且$d=W(c)$,若存在$c_i=c_{i+1},c_j=c_{j+1}$,其中$i,i+1\leqslant j,j+1$,则$c'=c_ic_{i+1}\cdots c_jc_{j+1}$是$CA-232_{\alpha-\beta}(j-i+2)$的一个位形,且$d_id_{i+1}\cdots d_jd_{j+1}=W(c')$,其中$W$是$CA-232_{\alpha-\beta}(j-i+2)$的全域变换函数.

证明 显然成立.

如果位形c的子序列$c_ic_{i+1}\cdots c_jc_{j+1}$满足引理2的条件,可以有以下写法:

$d_1d_2\cdots d_id_{i+1}=W(c_1c_2\cdots c_ic_{i+1})$,

$d_id_{i+1}\cdots d_jd_{j+1}=W(c_ic_{i+1}\cdots c_jc_{j+1})$,

$d_jd_{j+1}\cdots d_{m-1}d_m=W(c_jc_{j+1}\cdots c_{m-1}c_m)$.

引理 4 对于$CA-232_{\alpha-\beta}(m)$,

(1) m为奇数时,位形$c=(10)^{\frac{m-1}{2}}1,d=(01)^{\frac{m-1}{2}}0$可稳定;

(2) m为偶数时,位形$e=(10)^{\frac{m}{2}},f=(01)^{\frac{m}{2}}$可稳定.

证明 我们只证明(1).对于(2)的证明与(1)的证明类似.

(1) m为奇数时,易见对任意$1\leqslant s\leqslant\frac{m-1}{2}$,有

(I) $\alpha=0,\beta=0$时,$W^s(c)=0^s(10)^{\frac{m-1}{2}-s}10^s$,$W^s(d)=0^s(01)^{\frac{m-1}{2}-s}0^{s+1}$,从而,$W^{\frac{m+1}{2}}(c)=0^m$,$W^{\frac{m-1}{2}}(d)=0^m$;

(II) $\alpha=0,\beta=1$时,$W^s(c)=0^s(10)^{\frac{m-1}{2}-s}1^{s+1}$,$W^s(d)=0^s(01)^{\frac{m-1}{2}-s}01^s$,从而,$W^{\frac{m-1}{2}}(c)=0^{\frac{m-1}{2}}1^{\frac{m+1}{2}}$,$W^{\frac{m-1}{2}}(d)=0^{\frac{m+1}{2}}1^{\frac{m-1}{2}}$;

(III) $\alpha=1,\beta=0$时,$W^s(c)=1^s(10)^{\frac{m-1}{2}-s}10^s$,$W^s(d)=1^s(01)^{\frac{m-1}{2}-s}0^{s+1}$,从而,$W^{\frac{m-1}{2}}(c)=1^{\frac{m+1}{2}}0^{\frac{m-1}{2}}$,

$W^{\frac{m-1}{2}}(d) = 1^{\frac{m-1}{2}}0^{\frac{m+1}{2}}$;

(Ⅳ) $T = 1, U = 1$时, $W(c) = 1^s(10)^{\frac{m-1}{2}-s}1^{s+1}$, $W(d) = 1^s(01)^{\frac{m-1}{2}-s}01^s$,从而, $W^{\frac{m-1}{2}}(c) = 1^m$, $W^{\frac{m+1}{2}}(d) = 1^m$.

综上所述,位形 c,d 可稳定.同理可证位形 e,f 可稳定.

引理 5 设c是 $CA-232_{T-U}(m)$的位形,若存在 $c_i = c_{i+1}, c_j = c_{j+1}$,其中 $i+1<j$,且 $c_{i+1}c_{i+2}\cdots c_j$ 中任意两个相邻元不相等,则子序列 $A = c_ic_{i+1}\cdots c_jc_{j+1}$ 是 c 的可稳定子序列.

证明 (Ⅰ)若 $c_i = c_{i+1} = c_j = c_{j+1} = 0$,则 $A = 00(10)^k100$,其中 $k \geqslant 0$, $2k+5 = j-i+2$. $k=0$时,有 $W(00100) = 00000$, $k>0$时,对任意 $1\leqslant s\leqslant k$,有 $W^s(00(10)^k100) = 0^{s+2}(10)^{k-s}10^{s+2}$, 从而, $W^{k+1}(00(10)^k100) = 0^{2k+5}$;

(Ⅱ) 若 $c_i = c_{i+1} = 0, c_j = c_{j+1} = 1$, 则 $A = 00(10)^k11$,其中 $k\geqslant 0$, $2k+4 = j-i+2$. $k=0$时, A已为 c的不动子序列, $k>0$时,对任意 $1\leqslant s\leqslant k$, 有 $W^s(00(10)^k11) = 0^{s+2}(10)^{k-s}1^{s+2}$, 从而, $W^k(00(10)^k11) = 0^{k+2}1^{k+2}$;

(Ⅲ) 若 $c_i = c_{i+1} = 1, c_j = c_{j+1} = 0$,此时与(Ⅱ)关于 0, 1对称,同理可证;

(Ⅳ) 若 $c_i = c_{i+1} = 1, c_j = c_{j+1} = 1$,此时与(Ⅰ)关于 0, 1对称,同理可证.

引理 6 设c是 $CA-232_{T-U}(m)$的位形,且存在 $c_i = c_{i+1}, c_j = c_{j+1}$,使得子序列 $c_1c_2\cdots c_{i-1}$ 与 $c_{j+2}\cdots c_m$ 都没有相邻元相等,其中 $1\leqslant i, i+1\leqslant j, j+1\leqslant m$.记 $A_1 = c_1c_2\cdots c_{i+1}$, $A_2 = c_jc_{j+1}\cdots c_m$,则 A_1, A_2 是 c的可稳定子序列.

证明 若 $c_i = c_{i+1} = 0$,则 $A_1 = (10)^k100$, $(2k+3 = i+1)$ 或 $(01)^k00$, $(2k+2 = i+1)$. $A_1 = (10)^k100$时,取 $c' = (10)^k1$,令 W为 $CA-232_{T-0}(2k+1)$的全域变换函数,则对任意 $s\geqslant 1$,有 $W(c') = W^s(c')$,由引理 4.(Ⅰ)知 c'在 $CA-232_{T-0}(2k+1)$中可稳定,从而子序列 c'在 $CA-232_{T-U}(m)$中可稳定,故 A_1在 $CA-232_{T-U}(m)$中可稳定.

$A_1 = (01)^k00$时,取 $c'' = (01)^k$,令 W为 $CA-232_{T-0}(2k)$的全域变换函数,则对任意 $s\geqslant 1$,有 $W(c'') = W^s(c'')$,由引理 4.(Ⅱ)知 c''在 $CA-232_{T-0}(2k)$中可稳定,从而子序列 c''在 $CA-232_{T-U}(m)$中可稳定,故 A_1在 $CA-232_{T-U}(m)$中可稳定.

当 $c_i = c_{i+1} = 1$时,同理可证 A_1可稳定.

对 $c_j = c_{j+1}$时的情形,进行类似的讨论,可证 A_2可稳定.

定理 1 $CA-232_{T-U}(m)$中任一位形均可稳定.

证明 设 c是 $CA-232_{T-U}(m)$的任一位形,

(Ⅰ)若 $c_1c_2\cdots c_m$ 中无相邻元相等,则当 m为奇数时, $c = (10)^{\frac{m-1}{2}}1$ 或 $(01)^{\frac{m-1}{2}}0$; 当 m为偶数时, $c = (10)^{\frac{m}{2}}$ 或 $(01)^{\frac{m}{2}}$.由引理 4知,上述 4种位形均可稳定.

(Ⅱ)若 $c_1c_2\cdots c_m$ 中有相邻元相等,设 $c_{i_1}c_{i_1+1}, c_{i_2}c_{i_2+1},\cdots, c_{i_n}c_{i_n+1}$ 是 $c_1c_2\cdots c_m$ 中从左至右所有不重复的相等相邻元,满足: $c_{i_j+1} < c_{i_{j+1}}$, $(j = 1,2,\cdots,n-1)$; $c_1\cdots c_{i_1-1}$ 与 $c_{i_n+2}\cdots c_m$ 中都无相等的相邻元; $c_{i_j+2}\cdots c_{i_{j+1}-1}$, $(j = 1,2,\cdots,n-1)$ 中无相等的相邻元.令 $A_1 = c_1\cdots c_{i_1+1}$, $A_j = c_{i_{j-1}}c_{i_{j-1}+1}\cdots c_{i_j}c_{i_j+1}$, $(j = 2,\cdots,n)$, $A_{n+1} = c_{i_n}c_{i_n+1}\cdots c_m$,由引理 5, 6知 $A_1, A_2,\cdots, A_{n+1}$都是 c的可稳定子序列,设 A_i的稳定步数为 s_i,则由 A_i的构造知 c的稳定步数为 $\max\{s_1,s_2,\cdots,s_{n+1}\}$,从而 c可稳定.

称定理 1证明中定义的子序列 $A_1,A_2,\cdots A_{n+1}$为位形 c的一个可稳定子序列划分.定理 1不仅指出 $CA-232_{T-U}(m)$的任一位形 c均可稳定,还给出 c的稳定步数的求法:由 c构造出 c的一个可稳定子序列划分 $A_1,A_2,\cdots A_{n+1}$,则 c的稳定步数为 A_i的稳定步数的最大值 $(i = 1,2,\cdots,n+1)$.

由定理 1,显然有以下推论.

推论 2 $CA-232_{T-U}(m)$只有周期长度为 1的循环.

由推论 2, $CA-232_{T-U}(m)$的任一位形 c的高度 $h(c)$就为 c的稳定步数,则 $CA-232_{T-U}(m)$的瞬时长度为 $CA-232_{T-U}(m)$的位形的稳定步数的最大值,从而有

定理 2 $CA-232_{T-U}(m)$的瞬时长度为

$$H(m) = \begin{cases} \dfrac{m}{2}, & m\text{为偶数}; \\ \dfrac{m+1}{2}, & m\text{为奇数}. \end{cases}$$

下面讨论 $CA-232_{T-U}(m)$中不动点的个数,即 $V_1(m)$.

记 $CA-232_{T-U}(m)$中以 1开头的不动点的个数为 $V_1^1(m)$,以 0开头的不动点的个数为 $V_1^0(m)$,则 $V_1(m) = V_1^1(m) + V_1^0(m)$.

引理 7 (Ⅰ)对于 $CA-232_{0-U}(m)$,有 $V_1^0(m) = V_1(m-1)$;

(Ⅱ)对于 $CA-232_{1-U}(m)$,有 $V_1^1(m) = V_1(m-1)$.

证明 设 c是 $CA-232_{T-U}(m)$的任一位形.

(Ⅰ)易见, $0c_2\cdots c_m$ 是 $CA-232_{0-U}(m)$的不动点当且仅当 $c_2\cdots c_m$ 是 $CA-232_{0-U}(m-1)$的不动点.故

$V_1^0(m) = V_1(m-1)$;

(II) 易见, $1c_2\cdots c_n$ 是 $CA-232_{1-\beta}(m)$ 的不动点当且仅当 $c_2\cdots c_n$ 是 $CA-232_{1-\beta}(m-1)$ 的不动点.故 $V_1^1(m) = V_1(m-1)$.

定理 3 (I) 对于 $CA-232_{0-\beta}(m)$, 有 $V_1(m) = V_1^1(m) + V_1^1(m-1) + \cdots + V_1^1(2) + V_1(1)$;

(II) 对于 $CA-232_{1-\beta}(m)$, 有 $V_1(m) = V_1^0(m) + V_1^0(m-1) + \cdots + V_1^0(2) + V_1(1)$.

证明　由引理 7知

(I) $V_1(m) = V_1^1(m) + V_1^0(m) = V_1^1(m) + V_1(m-1) = V_1^1(m) + V_1^1(m-1) + V_1^0(m-1) = \cdots = V_1^1(m) + V_1^1(m-1) + \cdots + V_1^1(2) + V_1(1)$.

(II) 同理可证.

由定理 3可得表 1,表 1给出了 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 对 $m = 1, 2,\cdots, 8$的不动点个数及瞬时长度.

表 1　$CA-232_{\alpha-\beta}(m)$不动点个数及瞬时长度

Table 1　The number of fixed points and transient length of $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$

$\alpha-\beta$	0-0			0-1			1-0			1-1		
	$V_1^1(m)$	$V_1(m)$	$H(m)$	$V_1^1(m)$	$V_1(m)$	$H(m)$	$V_1^0(m)$	$V_1(m)$	$H(m)$	$V_1^1(m)$	$V_1(m)$	$H(m)$
1	0	1	1	1	2	1	1	2	1	0	1	1
2	1	2	1	1	3	1	1	3	1	1	2	1
3	2	4	2	1	4	2	1	4	2	2	4	2
4	3	7	2	2	6	2	2	6	2	3	7	2
5	5	12	3	4	10	3	4	10	3	5	12	3
6	6	18	3	7	17	3	7	17	3	6	18	3
7	10	28	4	11	28	4	11	28	4	10	28	4
8	17	45	4	17	45	4	17	45	4	17	45	4

容易看出 $CA-232_{0-0}(m)$ 与 $CA-232_{1-1}(m)$ 的不动点关于 1, 0对称而成对出现, $CA-232_{1-0}(m)$ 的不动点与 $CA-232_{0-1}(m)$ 的不动点也关于 1, 0对称而成对出现,因此有

定理 4 (I) $CA-232_{0-0}(m)$ 与 $CA-232_{1-1}(m)$ 的不动点个数相等;

(II) $CA-232_{1-0}(m)$ 与 $CA-232_{0-1}(m)$ 的不动点个数相等.

3　满足周期边界条件的 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$

周期边界条件在 CA中是一个重要的性质.许多具体的问题都满足周期边界条件.下面我们对满足周期边界条件的 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 进行研究.

首先由引理 1立即得到下述结论.

引理 8 设 c是 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 的位形,则 c是不动点当且仅当 c_ncc_1 不包含子序列 101和 010.

由引理 8可得 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 的所有不动点.

推论 3 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 的所有不动点为以下 4种形式的位形:

(I) $1^{i_1}0^{j_1}1^{i_2}0^{j_2}\cdots 1^{i_n}0^{j_n}$,其中 $\sum_{k=1}^{n}(i_k + j_k) = m$; $i_k \geqslant 2, j_k \geqslant 2, (k = 1, 2,\cdots, n)$;

(II) $1^{i_1}0^{j_1}1^{i_2}0^{j_2}\cdots 1^{i_n}0^{j_n}1^{i_{n+1}}$,其中 $\sum_{k=1}^{n}(i_k + j_k) + i_{n+1} = m$; $j_k \geqslant 2, (k = 1, 2,\cdots, n)$; $i_1 > 0, i_k \geqslant 2, (k = 2,\cdots n), i_{n+1} > 0$;

(III) $0^{j_1}1^{i_1}0^{j_2}1^{i_2}\cdots 0^{j_n}1^{i_n}$,其中 $\sum_{k=1}^{n}(j_k + i_k) = m$; $j_k \geqslant 2, i_k \geqslant 2, (k = 1, 2,\cdots, n)$;

(IV) $0^{j_1}1^{i_1}0^{j_2}1^{i_2}\cdots 0^{j_n}1^{i_n}0^{j_{n+1}}$,其中 $\sum_{k=1}^{n}(j_k + i_k) + j_{n+1} = m$; $i_k \geqslant 2, (k = 1, 2,\cdots, n)$; $j_1 > 0, j_k \geqslant 2, (k = 2,\cdots, n), j_{n+1} > 0$.

在周期边界条件下, $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 也有与引理 2类似的结论.

引理 9 设 c, d是 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 的位形,且 $d = W(c)$,若存在 $c_ic_{i+1}\cdots c_{i+k} = a^{k+1}, (k \geqslant 1)$,则 $d_id_{i+1}\cdots d_{i+k} = a^{k+1}$,其中 $a \in \{0, 1\}$.

引理 10 设 c是 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 的位形,若存在 $c_i = c_{i+1} = a^2, c_j = c_{j+1} = b^2$,其中 $1 \leqslant i, i+1 < j, j+1 \leqslant m, a, b \in \{0, 1\}$,则子序列 $c_ic_{i+1}\cdots c_jc_{j+1}$ 是 c的可稳定子序列.

证明　设 $c' = c_ic_{i+1}\cdots c_jc_{j+1}$,则 c' 是 $CA-R_{a-b}(j-i+2)$ 的位形,对任意 $k \geqslant 0$,令 $e = W^k(c)$,则有 $e_ie_{i+1}\cdots e_je_{j+1} = W^k(c')$,其中 W是 $CA-232_{a-b}(j-i+2)$ 的全域变换函数,由定理 1知 c' 是 $CA-232_{a-b}(j-i+2)$ 的可稳定位形,从而 $c_ic_{i+1}\cdots c_jc_{j+1}$ 是 c的可稳定子序列.

引理 11 设 c是 $CA-232_{\alpha-\beta}(m)$ 的位形, $e = W^k(c), (k \geqslant 1)$,若 $c_1 = c_m = a$其中 $a \in \{0, 1\}$,则 $e_1 = e_m = a$.

证明　显然成立.

引理 **12** 设 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$ 的位形,若 $c_1=c_m$,则 c 可稳定.

证明 设 $c_1=c_m=a\in\{0,1\}$,由引理 11知,对任意 $k\geq1$,有 $W(c)=W^k(c)$,其中,W 是 CA－$232_{a-a}(m)$ 的全域变换函数.又由定理 1知 c 关于 CA－$232_{a-a}(m)$ 可稳定,从而 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$ 的可稳定位形.

引理 **13** 设 c,d 是 CA－$232_{L-U}(m)$,$(m\geq4)$ 的 2个位形,且 $d=W(c)$,$c_1\neq c_m$,若 $c_1c_2\cdots c_m$ 中有 2个相同的相邻元 c_ic_{i+1},$(1\leq i\leq m-1)$,则 c 是可稳定的,否则 c 不可稳定.

证明 现只证明 $c_1=0,c_m=1$ 的情形.$c_1=1,c_m=0$ 的情形同理可证.

(Ⅰ) 若 $c_2=0,c_{m-1}=1$,则 $d_1=d_2=0,d_{m-1}=d_m=1$,由引理 10知 d 是可稳定的,从而 c 可稳定;

(Ⅱ) 若 $c_2=1,c_{m-1}=1$,则 $d_1=d_m=1$,由引理 12知 d 可稳定,从而 c 可稳定;

(Ⅲ) 若 $c_2=0,c_{m-1}=0$,则 $d_1=d_m=0$,由引理 12知 d 可稳定,从而 c 可稳定;

(Ⅳ) 若 $c_2=1,c_{m-1}=0$,设 $c_1c_2\cdots c_m$ 中有 2个相同的相邻元 c_ic_{i+1},$(1\leq i\leq m-1)$,不妨设 c_ic_{i+1} 是 $c_1c_2\cdots c_m$ 中从左至右最先 2个相同的相邻元,$c_{m-k}c_{m-k+1}$ 是 $c_1c_2\cdots c_m$ 中从左至右最后 2个相同的相邻元,由引理 10知子序列 $c_ic_{i+1}\cdots c_{m-k}c_{m-k+1}$ 是 c 的可稳定子序列,记子序列 $c_{i+2}\cdots c_{m-k-1}$ 在全域变换函数作用下的变化用＊号表示.

(a) 若 $c_ic_{i+1}=00$,$c_{m-k}c_{m-k+1}=00$,则 $c_1c_2\cdots c_ic_{i+1}=(01)^{l_1}00$,$(2l_1+2=i+1,l_1\geq0)$;$c_{m-k}c_{m-k+1}\cdots c_m=0(01)^{l_2}$,$(2l_2+1=k+1,l_2\geq0)$,对任意 $s\leq\min(2l_1,2l_2)$,有

$$W^s(c)=\begin{cases}(10)^{l_1-\frac{s-1}{2}}0^{2+2\frac{s-1}{2}}*\ 0^{1+2\frac{s+1}{2}}(10)^{l_2-\frac{s+1}{2}}, & s\text{为奇数},\\ (01)^{l_1-\frac{s}{2}}0^{2+2\frac{s}{2}}*\ 0^{1+2\frac{s}{2}}(01)^{l_2-\frac{s}{2}}, & s\text{为偶数}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(10)^{l_1-\frac{s-1}{2}}0^{s+1}*\ 0^{s+2}(10)^{l_2-\frac{s+1}{2}}, & s\text{为奇数},\\ (01)^{l_1-\frac{s}{2}}0^{s+2}*\ 0^{s+1}(01)^{l_2-\frac{s}{2}}, & s\text{为偶数}.\end{cases}$$

若 $l_1\leq l_2$,则 $W^{2l_1}(c)=0^{2l_1+2}*\ 0^{2l_1+1}(01)^{l_2-l_1}$,设 $W^{2l_1}(c)=e$,W 是 CA－$232_{0-0}(m)$ 的全域变换函数,则对任意 $n\geq1$,有 $W(e)=W^n(e)$,由定理 1知 e 在 CA－$232_{0-0}(m)$ 中可稳定,从而 e 在 CA－$232_{L-U}(m)$ 中可稳定,故 c 在 CA－$232_{L-U}(m)$ 中可稳定.若 $l_1>l_2$,则 $W^{2l_2-1}(c)=(10)^{l_1-l_2+1}0^{2l_2}*\ (0)^{2l_2+1}$.令 $W^{2l_2-1}(c)=f$,则对任意 $n\geq1$,有 $W(f)=W^n(f)$,由定理 1知,f 在 CA－$232_{0-0}(m)$ 中可稳定,从而 f 在 CA－$232_{L-U}(m)$ 中可稳定,故 c 在 CA－$232_{L-U}(m)$ 中可稳定.

(b) 对 $c_ic_{i+1}=00,c_{m-k}c_{m-k+1}=11$,或 $c_ic_{i+1}=11,c_{m-k}c_{m-k+1}=00$,或 $c_ic_{i+1}=11,c_{m-k}c_{m-k+1}=11$ 的情形,与(a)类似地可证明 c 是可稳定的.

假设 $c_1c_2\cdots c_m$ 中不存在相等的相邻元,则 $c=(01)^l$,$(2l=m)$,有 $W(c)=(10)^l$,$W^2(c)=(01)^l$,此时 c 不可稳定,且 c 与 $W(c)$ 构成 2-循环.

综上所述,$c_1=0,c_m=1$ 时,结论成立.类似地可证明对 $c_1=1,c_m=0$ 的情形结论成立.

由引理 12和引理 13易得:

定理 **5** 设 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$ 的位形,若 $c_1c_2\cdots c_mc_1$ 中存在 2个相邻元相同,则 c 可稳定,否则 c 不可稳定.

由定理 5,显然有以下推论:

推论 **4** (Ⅰ) 若 m 为奇数,则 CA－$232_{L-U}(m)$ 的任意位形都可稳定,从而只有周期长度为 1的循环;

(Ⅱ) 若 m 为偶数,则 CA－$232_{L-U}(m)$ 只有周期长度为 1和 2的循环,且 2-循环必由 $(01)^{\frac{m}{2}}$ 与 $(10)^{\frac{m}{2}}$ 构成.

下面讨论 CA－$232_{L-U}(m)$ 的不动点个数 $V_1(m)$.

引理 **14** 设 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$,$(m\geq4)$ 的位形,则

(Ⅰ) 若 $c_1=c_m=0$,则 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$ 的不动点当且仅当 $c_2c_3\cdots c_{m-1}$ 是 CA－$232_{0-0}(m-2)$ 的不动点;

(Ⅱ) 若 $c_1=c_m=1$,则 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$ 的不动点当且仅当 $c_2c_3\cdots c_{m-1}$ 是 CA－$232_{1-1}(m-2)$ 的不动点;

(Ⅲ) 若 $c_1=0,c_m=1$,则 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$ 的不动点当且仅当 $c_2=0,c_{m-1}=1$,且 $c_3c_4\cdots c_{m-2}$ 是 CA－$232_{0-1}(m-4)$ 的不动点;

(Ⅳ) 若 $c_1=1,c_m=0$,则 c 是 CA－$232_{L-U}(m)$ 的不动点当且仅当 $c_2=1,c_{m-1}=0$,且 $c_3c_4\cdots c_{m-2}$ 是 CA－$232_{1-0}(m-4)$ 的不动点.

证明 (Ⅰ) 显然.

(Ⅱ) 显然.

(Ⅲ) (⇒) 记 $d=W(c)=d_1d_2\cdots d_m$,由 c 是不动点得 $d_1=0,d_m=1$,又由于 $d_1=f(10c_2)$,$d_m=f(c_{m-1}10)$,所以 $c_2=0,c_m=1$,从而,$c_3c_4\cdots c_{m-2}$ 是 CA－$232_{0-1}(m-4)$ 的不动点.

(⇐) 显然.

(下转第 252页 Continue on page 252)

明 $p(y_n - z_n) > 0$时作者如下证明,由于 $f_n(x_0) \to 1 = f(x_0)$,因此对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n > N$时 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$故

$$p(y_n - z_n) \geqslant \frac{a_n}{n}\left(\frac{1}{p(x_0 + \frac{x_n}{n})} + \frac{1}{p(x_0 - \frac{x_n}{n})}\right) - \left|\frac{1}{p(x_0 + \frac{x_n}{n})} - \frac{1}{p(x_0 - \frac{x_n}{n})}\right| \varepsilon, \tag{21}$$

由 ε的任意性便得出 $p(y_n - z_n) > 0$. 但我们注意到,对每个取定 ε和适合条件的 n,并不能判断(21)大于等于号右方式子的正负性,也就无法由 ε的任意性推知 $p(y_n - z_n) > 0$. 但仿照本文在证明 $p(u_n - v_n) > 0$的方法可证得 $p(y_n - z_n) > 0$. 因而原文结论仍然成立.

参考文献

1 赵俊峰,路万忠. Banach空间一致光滑的一个等价条件. 数学物理学报, 1993, 13(2): 201~203.

2 陈珠明,林宗振. 局部凸空间光滑的充分条件. 暨南大学学报, 1996, 17(1): 17~23.

3 陈道琦. 支撑泛函唯一的一个充分条件. 数学学报, 1982, 25(3): 302.

4 俞鑫泰. 泛数 Frechet可微的一个充分条件——关于"支撑泛函唯一的一个充分条件". 数学进展, 1986, 15(2): 211.

5 王 炜. 局部凸空间的光滑性. 辽宁师范大学学报, 1999, 22(4): 272~275.

6 吴从炘,周 起. 局部凸空间的一致凸性. 数学年刊, 1990, 11A: 351~354.

7 Diestel J. Geometry of Banach spaces-selected topics, Lecture Notes in Math, Springer Verlag, 1975.

8 俞鑫泰. Banach空间的几何理论. 上海: 华东师范大学出版社, 1986.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第248页 Continue from page 248)

(Ⅳ)与(Ⅲ)的证明类似即可证明(Ⅳ).

记 $\nu_T(m)$ 为 CA-$232_{L-U}(m)$ 的 T-循环个数, $\nu_T^{a-b}(m)$为固定边界条件 $a-b$下 CA-$232_{a-b}(m)$的 T-循环个数, $(a, b \in \{0, 1\})$.

定理 6 (Ⅰ) CA-$232_{L-U}(m)$, $(m \geqslant 4)$的不动点个数为:

$\nu_1(m) = 2\nu_1^{0-0}(m-2) + 2\nu_1^{0-1}(m-4) = 2\nu_1^{1-1}(m-2) + 2\nu_1^{1-0}(m-4) = 2\nu_1^{0-0}(m-2) + 2\nu_1^{1-0}(m-4) = 2\nu_1^{1-1}(m-2) + 2\nu_1^{0-1}(m-4)$;

(Ⅱ) CA-$232_{L-U}(m)$中 2-循环的个数为

$$r_2^c(m) = \begin{cases} 0, m\text{为奇数}, \\ 1, m\text{为偶数}. \end{cases}$$

证明 (Ⅰ)由引理 14知 $\nu_1(m) = \nu_1^{0-0}(m-2) + \nu_1^{1-1}(m-2) + \nu_1^{0-1}(m-4) + \nu_1^{1-0}(m-4)$,又由定理 4知 $\nu_1^{0-0}(m-2) = \nu_1^{1-1}(m-2)$, $\nu_1^{0-1}(m-4) = \nu_1^{1-0}(m-4)$结论成立.

(Ⅱ) 由推论 4直接得到.

参考文献

1 Wolfram S. Theory and Application of Cellular Automata, Singapore: World Scientific, 1986.

2 Kawahara Y, Kumamote S, Mizoguchi Y, et al.. Period lengths of cellular automata on square lattices with rule 90. J Math Phys, 1995, 36(3): 1435~1456.

3 Lee H, Kawahara Y. On dynamical behaviors of cellular automata with linear rule 60. Bulletin of Informatics and Cybernetics, 1992, (25): 22~27.

4 Sato T. On behaviors of cellular automata with rule 27. Kyushu J Math, 1996, (50): 133~152.

5 Inokuchi S. On behaviors of cellular automata with rule 156. Bulletin of Informations and Cybernetics, 1998, 30(1): 121~131.

6 Inokuchi S. On behaviors of cellular automata with rule 14 and 142. Http://citeseer.nj.nec.com/51143.html. 1999-02-01.

7 Ramon Alonso-Sanz, Martin M. One-dimension cellular automata with memory. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(1): 205~226.

8 Martin B. A group interpretation of particles generated by one-dimensional cellular automaton wolfram's rule 54. International Journal of Modern Physics C, 2000, 11(1): 101~123.

(责任编辑: 黎贞崇)