

奇异原子中的相互作用及其能级*

Interaction and Its Energies of the Strange Exotic Atoms

张学龙

游阳明**

Zhang Xuelong You Yangming

(上海医疗器械学院 上海 200093)

(Shanghai Medical Instrumentation College, Shanghai, 200093, China)

摘要 为进一步研究 K 介子原子和 Σ 超子原子两类奇异原子中的相互作用和能量问题, 具体数值求解了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程, 得到 K 介子原子和 Σ 超子原子的相应能级, 结果与实验数据吻合得相当好, 其相对误差最大的仅为 -0.058% 和 0.03% , 光学模型势应用于奇异原子能级计算能够提高理论结果的准确性. 这表明光学势正确地反映了介子或超子与核子之间的强相互作用, 并且表明核子间的强相互作用力为吸引力.

关键词 奇异原子 光学模型势 Klein-Gordon 方程 Dirac 方程

中图法分类号 O572.33

Abstract The interaction and energies of mesic atom and hyperon atom of both the strange exotic atoms are further studied. The energy levels of mesic atom and hyperon atom are obtained by solving of the Klein-Gordon equation and Dirac equation numerically. The results coincide with the experimental date well. The maximum fractional errors are -0.058% and 0.03% respectively. The optical model is applied to the calculation of energy levels of the strange exotic atoms can increase the correctness of the theoretical results. It is validity that the strong-interaction between the mesic or hyperon and nucleons is described by the optical model potential in the strange exotic atoms, and it is an attraction between the nucleons.

Key words strange exotic atom, optical model potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation

奇异原子由奇异粒子和原子核构成. 用奇异粒子 (如 K 介子和 Σ 超子等) 穿过物质的方法可以获得奇异原子, 其中 K 介子或 Σ 超子充当着重电子的角色. 本文以 K 介子原子和 Σ 超子原子为例, 重点介绍和讨论光学模型势应用于奇异原子能级计算的情况, 其结果反映了 Batty 光学模型势描述强相互作用的正确性.

对于 K 介子原子和 Σ 超子原子等奇异原子的研究, 能够获得强子-核相互作用、核内电荷密度分布以及核磁矩在核内的分布和核电四极矩的形变等重要信息, 这对于软 X 射线方面的研究也具有重要意义. 近年来, 不少学者^[1-3] 从低能散射角度计算相应的散射长度, 或者由对应光学势的虚部和实部计算相应的能级宽度和强度, 从而得出核子间强相互作用的

平均效果为吸引力.

本工作借助于 Batty C. J 的光学模型势, 通过对奇异原子相应的方程进行数值求解, 所得到的奇异原子的能级, 与实验观测符合得很好.

1 理论分析

K 介子和 Σ 超子都是强子, 它们参与强相互作用. 由一个原子核和一个带负电荷的强子组成的类氢体系称为强子原子. 强子原子是不稳定的, 寿命很短. 但是, 应用现代实验技术已经能够观测到这些特殊原子的一部分光谱线. 很显然, 由于 K 介子和 Σ 超子等强子与原子核之间主要通过强作用相联系, 氢原子的理论已不完全适用于强子原子, 因而必须采用新的计算方案.

K 介子原子是具有自旋为零的原子体系, 它可以由 Klein-Gordon 方程来描述. 而 Σ 超子原子是具有自旋为 $1/2$ 的原子体系, 则需用具有多分量波函数的 Dirac 方程描述. 若把 K 介子原子和 Σ 超子原子的核视为点状核, 仅考虑 K 介子与核子、 Σ 超子

2003-03-05 收稿, 2003-04-10 修回.

* 国家自然科学基金 (50074030) 和上海医疗器械学院基金资助.

** 沧州师范学院 河北 061001 (Cangzhou Teacher's College, Hebei, 061001, China).

与核之间的库仑相互作用,且势能函数 $V(r)$ 与时间无关,则可得到相应的定态 Klein-Gordon方程和定态 Dirac方程分别为

$$[(E - V)^2 - m_K^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \nabla^2] j(\vec{r}) = 0, \quad (1)$$

$$[c(\vec{T} \cdot \vec{p}) + U m_\Sigma c^2 + V(r)] j(\vec{r}) = E j(\vec{r}), \quad (2)$$

(1)、(2)式中 m_K 表示介子质量, $\hbar = h/2\pi$ 是约化 Planck 常数, c 表示真空中光速, m_Σ 为 Σ 超子的质量, $c\vec{T}$ 代表 Σ 超子的速度算符,在 Pauli-Dirac 表象中, \vec{T} 与 Pauli 矩阵 $\vec{\sigma}$ 有如下关系

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

另外, (2) 式中 U 为无量纲矩阵算符

$$U = \begin{pmatrix} \vec{1} & 0 \\ 0 & \vec{1} \end{pmatrix},$$

$\vec{1}$ 是 2×2 单位矩阵, p 为相应的动量算符, E 和 $j(\vec{r})$ 分别表示体系的总能量及波函数,

$$j(\vec{r}) = \begin{pmatrix} j_1(\vec{r}) \\ j_2(\vec{r}) \end{pmatrix},$$

其中 $j_1(\vec{r})$ 和 $j_2(\vec{r})$ 均为二分量的波函数。

在强子原子中,由于介子或超子较重,距离核很近,相应的库仑力不同于点状核或介子和超子一直处于核外的情况。经过我们的计算和分析,认为考虑核

表 1 K^- Pb 原子 ($\Delta n = 1$) 跃迁能量

Table 1 The transition energies of K^- Pb atom ($\Delta n = 1$)

跃迁 Transition	理论计算 Theoretical calculating (keV)	电子屏蔽 Screening (eV)	α ($Z\alpha$) (eV)	α^2 ($Z\alpha$) (eV)	α^3 ($Z\alpha$) (eV)	实验结果 ^[6] Result (keV)
13 \rightarrow 12	91.995	- 51.8	284.0	2.0	- 7.7	90.929 \pm 0.015
12 \rightarrow 11	119.926	- 44.9	419.5	2.9	- 10.6	116.952 \pm 0.010
11 \rightarrow 10	155.726	- 38.2	632.8	4.3	- 14.7	153.892 \pm 0.011
10 \rightarrow 9	210.762	- 31.9	980.0	6.7	- 20.7	208.256 \pm 0.008
9 \rightarrow 8	295.106	- 25.9	1569.5	10.9	- 29.8	291.577 \pm 0.013
8 \rightarrow 7	431.255	- 20.4	2625.5	18.6	- 44.5	426.18 \pm 0.012

表 2 Σ^- Pb 和 Σ^- W 原子 ($\Delta n = 1$) 跃迁能量

Table 2 The transition energies of Σ^- Pb atom and Σ^- W atom ($\Delta n = 1$)

跃迁 Transition	理论计算 Theoretical calculating /keV		电子屏蔽 Screening (keV)	实验结果 ^[7,8] Result (keV)	相对误差 Fractional error (%)
	$j = l_i + 1/2$	$j = l_i - 1/2$			
Σ^- Pb (14 \rightarrow 13)	174.614	174.759	0.092	174.736 \pm 0.028	+ 0.028
Σ^- Pb (13 \rightarrow 12)	220.322	220.546	0.079	220.315 \pm 0.018	- 0.054
Σ^- Pb (12 \rightarrow 11)	283.308	283.682	0.050	283.280 \pm 0.044	- 0.076
Σ^- W (14 \rightarrow 13)	142.107	142.236	0.067	142.09 \pm 0.047	- 0.057
Σ^- W (13 \rightarrow 12)	179.205	179.368	0.055	179.183 \pm 0.019	- 0.058
Σ^- W (12 \rightarrow 11)	230.462	230.713	0.043	230.454 \pm 0.021	- 0.050

的有限大小与视核为点状核两种情况所计算的结果不相同,但差异甚微。为了进一步计算和分析方便,仍可将强子原子近似视为点状核来处理。

根据经典理论,设 $eA_0 = V(r)$ 并令矢势 $A = 0$, 其中 A_0 为四维势零分量,于是得到所需要的库仑势表式

$$V_{\text{cou}}(r) = eA_0 = -\frac{Ze^2}{r}, \quad (3)$$

式中 e 为电子电量, Z 为核电荷数。

将 (3) 式分别代入 (1) 式和 (2) 式,经过类似于文献 [4, 5] 的运算和求解,得到 K^- 介子原子和 Σ^- 超子原子的能量表达式依次为

$$E_{nl} = m_K c^2 \left[1 - \frac{Z^2 T^2}{2n^2} - \frac{Z^4 T^4}{2n^4} \left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (4)$$

$$E_{nj} = m_\Sigma c^2 \left[1 - \frac{Z^2 T^2}{2n^2} - \frac{Z^4 T^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (5)$$

式中 T 为精细结构常数,主量子数 $n = 1, 2, 3, \dots$, 角量子数 $l = 0, 1, 2, \dots$ 和 $j = 1/2, 3/2, \dots, (n - 1)/2$ 。

根据 (4) 式和 (5) 式可以分别计算出 K^- 介子原子和 Σ^- 超子原子的各级能量。我们将算出的 K^- Pb 原子和 Σ^- Pb 原子、 Σ^- W 原子循环跃迁 (均为 $\Delta n = 1$) 能量分别列于表 1 和表 2 为便于比较,在表 1 表 2 中同时也列出文献 [6] 和文献 [7] 的实验结果。

由表 1 不难看出,上述理论计算与实验结果相差甚远,因此 K 介子与核子之间的相互作用仅考虑到库仑力是不够的.对于 Σ 超子与核子之间也有类似情况.我们注意到,即使计及电子屏蔽与真空极化效应的修正,仍与实验数据有较大的误差.其主要原因就是没有考虑到介子或超子与核子之间的强相互作用.下面进一步考虑强子与核子之间的强相互作用,采用光学模型势并计及真空极化效应的修正后予以计算.

2 采用光学模型势并计及真空极化效应

按照量子理论,在强子原子体系中,波函数在核内应该不为零,强子总有一定的概率处于核内,这就产生了强子与核子之间的强相互作用.为了描述这一强相互作用,对于 K 介子原子和 Σ 超子原子采用的光学模型势分别为^[3,9]

$$V_{\text{opt}}(\vec{r}) = -\frac{2c}{-K} \left(1 + \frac{K}{m}\right) [b + B \left(\frac{d(\vec{r})}{d(0)}\right)^U] d(\vec{r}), \quad (6)$$

$$V_{\text{opt}}(\vec{r}) = -\frac{2c}{-\Sigma} \left(1 + \frac{\Sigma}{m}\right) \{ [b_0 + B_0 \left(\frac{d(\vec{r})}{d(0)}\right)^U] d(\vec{r}) + [b_1 + B_1 \left(\frac{d(\vec{r})}{d(0)}\right)^U] W d(\vec{r}) \}, \quad (7)$$

表 3 K 介子原子光学势参数

Table 3 The optical potential parameters of K mesic atom

Reb (fm)	ReB (fm)	Im b (fm)	Im B (fm)	U	i^2/F
0.69 ± 0.06	0	0.94 ± 0.05	0	0	1.60
0.75 ± 0.07	0	0.37 ± 0.17	0	0	2.61
0.48 ± 0.07	-0.26 ± 0.17	0.98 ± 0.08	-0.63 ± 0.14	1.0	1.48
0.60 ± 0.06	1.0 ± 0.72	0.67 ± 0.44	-0.62 ± 0.65	1.0	2.05
1.53 ± 0.08	-0.13 ± 0.02	0.74 ± 0.07	-0.09 ± 0.02	-0.4	1.31
0.54 ± 0.38	0.30 ± 0.28	0.68 ± 0.34	-0.13 ± 0.08	-0.4	2.19
-0.15	1.63 ± 0.07	0.62	-0.0 ± 0.08	0.2 ± 0.03	1.39

表 4 Σ 超子原子光学势参数

Table 4 The optical potential parameters of Σ hyperon atom

	MAC	MAC	MAC	MAC	SP	SP	SP	SP	SP
Reb ₀	0.31 ± 0.04	0.38 ± 0.09	1.5 ± 0.6	1.3 ± 0.7	0.33 ± 0.05	0.31 ± 0.09	1.1 ± 0.5	2.4 ± 1.2	<u>1.2</u>
Im b ₀	0.21 ± 0.03	0.20 ± 0.03	0.37 ± 0.07	0.35 ± 0.08	0.24 ± 0.04	0.24 ± 0.05	0.43 ± 0.11	0.49 ± 0.12	<u>0.45</u>
Reb ₁		-0.3 ± 0.3		-0.2 ± 0.3		0.03 ± 0.25		-1.0 ± 0.5	<u>-0.45</u>
ReB ₀			-2.5 ± 1.5	-2.0 ± 2.2			-1.7 ± 1.2	-4.3 ± 3.4	-1.5 ± 0.1
Im B ₀									-0.13 ± 0.07
β			<u>0.4</u>	<u>0.4</u>			<u>0.4</u>	<u>0.4</u>	<u>0.4</u>
χ^2/F	47.7	45.4	21.9	21.8	47.9	47.9	29.2	16.7	20.4

含下划线的量在拟合过程中保持不变. The measures with underline keep no changing in the fitting course.

其中 μ 是强子与原子核的约化质量, m 表示强子质量, $d(r)$ 是核物质密度; $d(\vec{r}) = d_n(\vec{r}) + d_p(\vec{r})$ 和 $W(\vec{r}) = d_n(\vec{r}) - d_p(\vec{r})$ 分别是等标量和等矢量密度分布; b 和 B 为复参数, 当改变 b 和 B 时, 参数 U 值保持不变^[9-11], 且 $\text{Im} b_1 = -\text{Im} b_0$ 和 $\text{Im} B_1 = -\text{Im} B_0$, b , B 和 U 的取值如表 3 和表 4 所给出. 表中 MAC 和 SP 分别相应于“宏观”模型和“单粒子”模型; i^2/F 为数值计算时取用的每自由度拟合因子; 所有下划线的量在拟合过程中保持不变; b 和 B 的单位均为 fm.

当介子或超子与核子之间具有强相互作用时, 真空极化效应就成为重要因素, 因此也必须加以考虑. 根据文献 [6, 12], 可以认为在强子原子中真空极化势主要为

$$V_{\text{vac}}(\vec{r}) = -\frac{e^2 T^c}{c^2} \int d^3 r' \frac{d(\vec{r})'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} L\left(\frac{2}{\Lambda} |\vec{r} - \vec{r}'|\right), \quad (8)$$

式中 $\Lambda \approx 386.159$ fm 为电子的约化 Compton 波长, $L()$ 为真空极化积分函数. 考虑到 $d(r')$ 的球对称性以及函数 $L_0(x) = -\int dx L(x)$. 可将式 (8) 改写为

后的理论计算结果 .

表 5 计及光学势的 K Pb原子 ($\Delta n=1$) 循环跃迁能量

Table 5 The circular transition energies of K Pb atom ($\Delta n=1$) on reckoning in the optical potential

跃迁 Transition	理论计算 Theoretical calculating (keV)	电子屏蔽 Screening (eV)	实验结果 Result (keV)	相对误差 Fractional error (%)
13 \rightarrow 12	90.982	-51.8	90.929 \pm 0.015	-0.058
12 \rightarrow 11	116.998	-44.9	116.952 \pm 0.010	-0.039
11 \rightarrow 10	153.909	-38.2	153.892 \pm 0.011	-0.011
10 \rightarrow 9	208.291	-31.9	208.256 \pm 0.008	-0.017
9 \rightarrow 8	291.643	-25.9	291.577 \pm 0.013	-0.023
8 \rightarrow 7	426.342	-20.4	426.181 \pm 0.012	-0.038

3 结论

以上通过求解 Klein-Gordon方程和 Dirac方程得到 K 介子原子和 Σ^- 超原子的能级, 并由此计算得到了 $\Delta n=1$ 的循环跃迁能量, 与实验数据很接近, 其相对误差最大的也只有 -0.058% 和 0.035% . 如果再将电子屏蔽效应考虑进去, 其最后结果与实验数据则吻合得相当好. 将表 5 和表 6 分别与表 1 和表 2 进行比较, 不难看出, 计及光学模型势, 即进一步考虑介子或超子与核子之间的强相互作用之后, 其数值结果普遍优于仅考虑库仑相互作用势的情况. 可见, 光学模型势的引入提高了理论计算结果的准确性. 这表明光学势正确地反映了介子或超子与核子之间的强相互作用, 进而可以认为参数 b 描写了介子或超子与核子的有效作用, 并且明显地表明了强相互作用为引力.

本工作的结果进一步支持了 Batty 光学模型势在奇异原子中描述强相互作用的正确性. 应用本文方法, 还可以求解并计算其它介子原子或超原子的系列能级和谱线波长, 这对于理论研究和应用研究都具有重要意义.

$$V_{vac}(\vec{r}) = -\frac{e^2 T}{c^2} \Delta \int_0^\infty \frac{d^3 \vec{r}'}{r'} d(\vec{r}') [L_0(\frac{2}{\Lambda} |\vec{r} - \vec{r}'|) - L_0(\frac{2}{\Lambda} |\vec{r} + \vec{r}'|)]. \quad (9)$$

考虑 (6) ~ (9) 式给出的势函数模型, 并取自然单位 ($c = \hbar = 1$), 相应 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程分别为

$$\nabla^2 j(\vec{r}) + [E - V_{cou}(\vec{r}) - V_{vac}(\vec{r}) - V_{opt}(\vec{r})] j(\vec{r}) = -k j(\vec{r}), \quad (10)$$

$$[\vec{T} \cdot \vec{p} + U_{m\Sigma} + V_{cou}(\vec{r}) + V_{vac}(\vec{r}) + V_{opt}(\vec{r})] j(\vec{r}) = E j(\vec{r}), \quad (11)$$

其中 m_K 为系统的约化质量. 按照方程 (10) 和方程

(11), 我们具体求解并计算了 K^- Pb 原子和 Σ^- Pb

Σ^- W 原子的能级. 对于三参数高斯模型 (3PG)

的 ^{208}Pb , $d(r)$ 为^[13]

$$d(r) = d_0 \left(1 + \frac{k r^2}{c^2}\right) \left[1 + \exp\left(\frac{r^2 - c^2}{A_3^2}\right)\right]^{-1}, \quad (12)$$

式中参数 $d_0 = 0.17$, $c_3 = 6.39(\pm 5)$ fm, $A_3 = 2.86(\pm 3)$ fm, $k = 0.24(\pm 12)$.

对于二参数费米模型 (2PF) 的 ^{208}Pb , 有

$$d(r) = d_0 \left[1 + \exp\left(\frac{r - c_2}{A_2}\right)\right]^{-1}, \quad (13)$$

式中参数 $d_0 = 0.17$, $c_2 = 6.624(\pm 35)$ fm, $A_2 = 0.549(\pm 8)$ fm. 对于二参数费米模型 (2PF) 的 ^{184}W , 参数^[10] $d_0 = 0.17$, $c_2 = 6.517$ fm, $A_2 = (0.535 \pm 1)$ fm.

我们对 3PG 和 2PF 两种不同情况进行计算, 通过数值求解后得到 K^- Pb 原子和 Σ^- Pb 原子、 Σ^- W 原子 ($\Delta n=1$) 的循环跃迁能量, 见表 5 和表 6. 由于表 3 和表 4 中的有关参数具有一定的不确定性, 我们在计算时分别取了 “+”、“-” 对应的 2 个值代入计算, 再对其结果取平均得到表 5 和表 6 给出的最

表 6 计及光学势的 Σ^- Pb 和 Σ^- W 原子 ($\Delta n=1$) 跃迁能量

Table 6 The Transition energies of Σ^- Pb and Σ^- W atom ($\Delta n=1$) on reckoning in the optical potential

跃迁 Transition	理论计算 [*]		电子屏蔽 Screening (keV)	实验结果 Result (keV)	相对误差 ^{**} Fractional error (%)
	$j_i = l_i + 1/2$	$j_i = l_i - 1/2$			
Σ^- Pb (14 \rightarrow 13)	174.652	174.723	0.092	174.736 \pm 0.028	+0.027
Σ^- Pb (13 \rightarrow 12)	220.288	220.249	0.079	220.315 \pm 0.018	+0.021
Σ^- Pb (12 \rightarrow 11)	283.269	283.424	0.050	283.280 \pm 0.044	-0.024
Σ^- W (14 \rightarrow 13)	142.104	142.175	0.067	142.091 \pm 0.047	-0.035
Σ^- W (13 \rightarrow 12)	179.139	179.313	0.055	179.183 \pm 0.019	-0.024
Σ^- W (12 \rightarrow 11)	230.409	230.587	0.043	230.454 \pm 0.021	-0.019

* 计算时 m_Σ 取 1197.53 MeV, m_K 取 493.715 MeV; ** 仅为实验值与理论值之间.

* The m_Σ is 1197.53 MeV, and m_K is 493.715 MeV while calculating. ** From experiment value to theory value.

(下转第 204 页 Continue on page 204)

4 Levine I. Physical Chemistry. Second edition. New York McGraw-Hill Book CO, 1983. 74~ 92.

5 夏江学编. 力学与热学 (下册). 北京: 清华大学出版社, 1985. 158~ 165.

6 段泰崴. 卡诺定理论证方法的不足和完善. 重庆交通学院学报, 1995, 14(4): 109~ 111.

7 刘凤鳌. 卡诺定理及其推广的简捷证明. 工科物理. 1994, (3): 18~ 19.

8 张小溪, 吴建中. 不可逆性对热机功率效率的影响. 昆明理

工大学学报, 1996, 21(3): 77~ 82

9 郭忠远. 关于任意逆循环制冷系数的讨论. 吉林师范学院学报, 1998, 19(1): 47~ 48.

10 刘士荣, 杨爱云编著. 物理化学概念辨析. 长沙: 湖南科技出版社, 1986. 23~ 25, 76~ 77.

11 伏义路, 许澍谦, 邱联雄编. 化学热力学与统计热力学基础. 上海: 上海科学技术出版社, 1984. 82.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 199页 Continue from page 199)

参考文献

1 Friedman E, Gal A, Batty C J. The density dependent potentials and the strong interactions. Phys Lett, 1993, B (208): 6~ 12.

2 Brown G E, Kubodera K, Rho M et al. The scattering length from the evaluation on the low-energy scattering angle. Nucl Phys, 1994, A(567): 837~ 852.

3 Batty C J. Strange exotic atoms. Nucl Phys, 1995, A (585): 229~ 238.

4 曾谨言. 量子力学 (卷II). 北京: 科学出版社, 2000. 585~ 586.

5 喀兴林. 高等量子力学. 北京: 高等教育出版社, 1999. 295~ 306.

6 Cheng S C et al. The theoretically calculating of K^- atomic mass. Nucl Phys, 1975, A(254): 383~ 393.

7 Gall K P, Austin E, Miller J P et al. Precision Measurements of the K^- and Σ^- masses. Phys Rev Lett, 1988, 3 (60): 186~ 189.

8 Powers R J et al. Strong-interaction effect measurements in sigma hyperonic atoms of W and Pb. Phys Rev, 1993, 3

(47): 1263~ 1273.

9 Friedman E et al. Density-dependent K^- nuclear optical potentials from kaonic atoms. Nucl Phys, 1994, A(579): 518~ 538.

10 Batty C J, Friedman E, Gal A. Density dependence of the Σ^- nucleus optical potential derived from Σ^- atom data. Phys Lett, 1994, B(335): 273~ 278.

11 Friedman E. Strange exotic atoms. Nucl Phys, 1998, A (639): 511c~ 519c.

12 Wayne F L, Rinker G A et al. Accurate and efficient methods for the evaluation of vacuum-polarization-potentials of order $Z\alpha$ and $Z\alpha^2$. Phys Rev A, 1976, 13(3): 1283~ 1299.

13 Masaru A. Boson exchange potentials and three-parameter Gaussian model. Prog Theor Phys, 1978, 30(2): 209~ 219.

14 Vries H et al. Nuclear charge density distribution parameters. Atomic Data and Nuclear Tables, 1987, 36(3): 501~ 509.

(责任编辑: 黎贞崇 邓大玉)