

库仑定律和牛顿第二定律的理论推导

Theoretical Derivation to Newton's Second Law and the Law of Coulomb

付昱华

Fu Yuhua

(中国海洋石油研究中心 北京 4728信箱 100027)

(China Offshore Oil Research Centre, P. O. Box 4728, Beijing, 100027, China)

摘要 为了探讨从理论上导出库仑定律和牛顿第二定律的可能性,根据能量守恒定律,用变维分形方法改进库仑定律和牛顿第二定律,并给出同时推导改进的库仑定律及牛顿第二定律的方法和针对带电小球在带电球体的电场中沿长斜面滚下的实例.具体给出适用于实例的常维分形结果:改进的库仑定律(非平方反比库仑定律)为 $f = kq_1q_2/r^{1.99989}$,改进的牛顿第二定律为 $F = ma^{1.01458}$.

关键词 库仑定律 牛顿第二定律 分形方法 理论推导

中图法分类号 O472

Abstract To discuss the possibility of deriving the law of Coulomb and Newton's second law theoretically, according to the law of conservation of energy, the variable dimension fractal method is developed, and used to improve Newton's second law and the law of Coulomb in an example (a small electrification ball moves down along a long incline within the electric field due to an electrification globe). The results suitable for this example with the constant dimension fractal form as follows: the improved law of Coulomb (inverse non-square law of Coulomb), $f = kq_1q_2/r^{1.99989}$; the improved Newton's second law $F = ma^{1.01458}$.

Key words the law of Coulomb, Newton's second law, fractal method, theoretical derivation

库仑定律是根据实验结果总结出来的。库仑提出的库仑定律的形式为

$$f = \frac{kq_1q_2}{r^2}. \quad (1)$$

显然,库仑提出的库仑定律和牛顿提出的万有引力定律都是平方反比定律。然而,文献 [1] 中已经根据文献 [2] 中给出的改进的牛顿万有引力公式提出非平方反比引力定律。

类似于非平方反比引力定律,两带电物体做相对运动时(此时必须考虑牛顿第二定律),其相互作用力将符合非平方反比库仑定律。

牛顿第二定律也是根据实验结果总结出来的。牛顿提出的第二定律的形式为

$$F = ma. \quad (2)$$

这两个定律能否从理论上导出要看是否有 1 个应用范围更广泛的定律。目前能够担当这一重任的只有能量守恒定律(原理)。因为库仑定律及牛顿第二定律只能处理宏观物理现象,而能量守恒定律不但能

够处理宏观物理现象,而且也能处理微观物理现象。

为了探讨从理论上导出这两个定律的可能性,笔者根据能量守恒定律,用变维分形方法改进库仑定律及牛顿第二定律,并给出同时推导改进的库仑定律及牛顿第二定律的方法和针对带电小球在带电球体的电场中沿长斜面滚下的实例。由于求解过程十分复杂,为简便起见,只给出适用于本例的常维分形结果。

1 同时导出改进的库仑定律及牛顿第二定律的变分原理

能量守恒定律是自然界的一条基本定律,主要内容:在封闭系统中,系统的总能量保持不变。下面用最小二乘法给出能量守恒定律建立的变分原理。

设封闭系统的初始总能量为 $W(0)$,任意时刻的总能量为 $W(t)$,则根据能量守恒定律应有

$$W(0) = W(t). \quad (3)$$

上式可以写为

$$R_w = \frac{W(t)}{W(0)} - 1 = 0. \quad (4)$$

应用最小二乘法,对于区间 $[t_1, t_2]$,根据能量守

恒定律可得如下变分原理

$$C = \int_{t_1}^{t_2} R \dot{w} dt = \min. \quad (5)$$

式中 \min 表示泛函 C 的最小值而且应当等于零^[3]。

除了时间坐标以外,还可以采用其他坐标,例如对于区间 $[x_1, x_2]$,根据能量守恒定律可得如下变分原理

$$C = \int_{x_1}^{x_2} R \dot{w} dx = \min. \quad (6)$$

以上是直接应用能量守恒定律建立的变分原理。有时还需要间接应用能量守恒定律建立变分原理。例如,感兴趣的某一物理量 Q ,既可以应用能量守恒定律来计算,又可以应用其他定律来计算。为了便于区别,将其他定律计算的结果仍然记为 Q ,将能量守恒定律计算的结果记为 Q' ,令 Rw 重新定义如下:

$$Rw = \frac{Q'}{Q} - 1 = 0. \quad (7)$$

将(7)式代入(5)式和(6)式,根据 Q' 是能量守恒定律计算的结果,所以得到间接应用能量守恒定律建立的变分原理。另外, Q 与 Q' 的符合程度也一目了然。

2 用变维分形方法改进的库仑定律及牛顿第二定律

在牛顿力学范围内,文献[2]已经对万有引力定律做出了一些改进。给出如下的改进公式:

$$F = - \frac{GMm}{r^2} - \frac{3G^2 M^2 m p}{c^2 r^4}, \quad (8)$$

式中 G 为引力常数; M 和 m 为两物体的质量; r 为两物体间的距离; c 为光速; p 为质量为 m 的物体在质量为 M 的物体的引力场中沿圆锥曲线运动时的半正焦弦,而且有:对于椭圆, $p = a(1 - e^2)$;对于双曲线, $p = a(e^2 - 1)$;对于抛物线, $p = y^2/2x$

当两物体做中心对中心运动(含相对静止)时,可视为半正焦弦 $p = 0$ 的情况,此时改进的万有引力公式与原有的万有引力公式相同。该公式对水星近日点进动问题和光线近日偏折问题均能给出与广义相对论一样的正确解。

但是,原有的万有引力定律和(8)式只能处理两物体做中心对中心运动(含相对静止)和质量为 m 的物体在质量为 M 的物体的引力场中沿圆锥曲线运动时的情况,对于受约束而作非中心对中心直线运动(不含相对静止)和沿其他曲线运动的情况,就要讨论更一般形式的万有引力定律

参照(8)式,可以将更一般形式的万有引力定律写为

$$F = - \frac{GMm}{r^2} \left(1 + \frac{a_1}{r^2} + \frac{a_2}{r^4} + \dots \right).$$

类似地,除了2个电荷处于相对静止的情况以外,可以将更一般形式的库仑定律写为

$$f = \frac{kq_1q_2}{r^2} \left(1 + \frac{a_1}{r^2} + \frac{a_2}{r^4} + \dots \right). \quad (9)$$

另外,在最近十几年间,分形方法已在一些领域获得成功应用,它被用来揭示复杂现象中深藏的有组织结构。反映有组织结构特征的量称为分维数,用 D 值来表示。在目前一般应用的分形方法中,分维数 D 为实数,例如不同地段海岸线的分维数 D 值可以取为 1.02 1.25 等。

分形分布可用如下幂指数分布定义^[4]:

$$N = \frac{C}{r^D},$$

式中 r 为特征线度,如长度、时间等; N 为与 r 有关的数量,如力、温度和高度等; C 为待定常数, D 为分维数

当 D 为常数时,这种分形可称为常维分形。

也可以将更一般形式的库仑定律写为变维分形^[5-7]的形式:

$$f = \frac{kq_1q_2}{r^D}. \quad (10)$$

式中 $D = f(r)$,例如可以令

$$D = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \dots. \quad (11)$$

不过在文中只取常维分形的形式,即 $D = \text{const}$ 在牛顿力学范围内,也可将对牛顿第二定律进行改进。可以将更一般形式的牛顿第二定律写为

$$F = ma + k_1 a^2 + k_2 a^3 + \dots. \quad (12)$$

也可以将更一般形式的牛顿第二定律写为变维分形的形式

$$F = m d^D. \quad (13)$$

式中 $D = f(r)$,例如可以令

$$D = k_1 + k_2 a + k_3 a^2 + \dots. \quad (14)$$

不过在本文中也只取常维分形的形式,即 $D = \text{const}$ 为方便计,写为

$$F = ma^X. \quad (15)$$

式中 $X = \text{const}$ 如果 $X = 0$,则成为原有的牛顿第二定律

3 同时导出改进的库仑定律及牛顿第二定律的方法

将(9)式或(10)式,(12)式或(13)式计算的有关物理量代入(5)式或(6)式,根据极值条件可以建立如下方程组:

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{\partial C}{\partial k} = 0. \quad (16)$$

解出此方程组以后,就可以同时得到改进的库

仑定律及牛顿第二定律. 判别解的近似程度可以根据 C 值接近于零的程度而定. C 值越接近于零, 效果越好.

显然, 在求解过程中没有依赖任何实验结果. 不过, 这样得到的改进的库仑定律及牛顿第二定律是否适用于其他场合, 是一个需要进一步研究的课题.

还需要说明的是, 除了求解方程组可以确定最小值及各待定常数以外, 用最优化算法也可以确定最小值及各待定常数. 文中将用最优化算法确定最小值及各待定常数.

4 同时导出改进的库仑定律及牛顿第二定律的实例

下面对于 1 个实例, 同时导出常维分形形式 (即 (10) 式和 (15) 式中的 D 和 X 均为待定常数) 的改进的库仑定律及牛顿第二定律.

如图 1 所示, 设圆 O' 代表带电大球体. 带电大球体的电量为 q_1 , 带电小球的质量为 m , 电量为 q_2 . q_1 及 q_2 为异号电荷. 设 $O'A$ 为 1 条铅垂线, x 坐标与 $O'A$ 垂直, y 坐标与 x 坐标垂直 (与 $O'A$ 平行). BC 与 $O'A$ 垂直. OA, OB, BC, AC 的长度均为 H , $O'C$ 的长度等于带电大球体半径 R .

设有 1 条从 A 到 B 的直线 (实际上是一个斜面), 考虑带电小球在电力作用下沿直线从 A 滚动到 B 的情况. 设当带电小球位于 A 点时, 其初速度为零, 引力和摩擦作用忽略不计.

对于该例, 感兴趣的物理量是带电小球在点 P 时速度的二次方 v_p^2 , 为了便于区别, 将改进的库仑定律及牛顿第二定律计算的结果仍然记为 v_p^2 , 将能量守恒定律计算的结果记为 $v_p'^2$, 将式 (7) 代入式 (6), 变分原理式 (6) 重新写为如下形式:

$$C = \int_{-H}^0 \left(\frac{v_p'^2}{v_p^2} - 1 \right)^2 dx = \min. \quad (17)$$

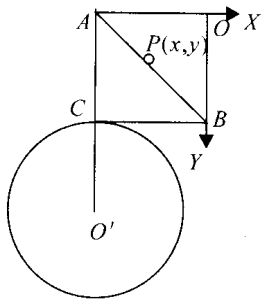


图 1 带电小球 A 从滚动到 B

Fig. 1 A small electrification ball rolls from A to B

先根据能量守恒定律计算有关的物理量. 因大球的电荷异号, 类似于引力 (重力) 势能, 由改进的库仑定律 (10) 式可以得到带电小球位于任意点 P 时

的势能为

$$V = - \frac{kq_1q_2}{(D-1)r_{OP}^{D-1}}. \quad (18)$$

根据能量守恒定律应有

$$- \frac{kq_1q_2}{(D-1)r_{OA}^{D-1}} = \frac{1}{2}mv_p'^2 - \frac{kq_1q_2}{(D-1)r_{OP}^{D-1}}. \quad (19)$$

于是有

$$v_p'^2 = \frac{2kq_1q_2}{m(D-1)} \left[\frac{1}{r_{OA}^{D-1}} - \frac{1}{(R+H)^{D-1}} \right]. \quad (20)$$

根据改进的库仑定律及牛顿第二定律, 计算有关的物理量. 考虑一般的情况, 设带电小球滚动的曲线为

$$y = y(x). \quad (21)$$

当带电小球运动到任意点 P 时, 由于

$$dv/dt = a, \quad (22)$$

而

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{v},$$

于是有

$$dv = a dt = a \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{v},$$

即有

$$v dv = a \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (23)$$

根据改进的库仑定律可得 P 处所受吸引力为

$$F_p = \frac{kq_1q_2}{r_{OP}^D}.$$

于是得沿切线方向所受力为

$$F_a = \frac{kq_1q_2}{r_{OP}^D} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (24)$$

根据改进的牛顿第二定律可得 P 处沿切线方向的加速度 a 为

$$a = \left(\frac{F_a}{m} \right)^{1/(1+X)} = \left(\frac{kq_1q_2 y'}{m r_{OP}^D \sqrt{1+y'^2}} \right)^{1/(1+X)}. \quad (25)$$

于是由 (23) 式可得

$$v dv = (kq_1q_2 y' / (m [(H+x)^2 + (R+H-y)^2]^{D/2} \sqrt{1+y'^2}))^{1/(1+X)} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx. \quad (26)$$

将上式两端从 A 到 P 进行积分可得

$$v_p^2 = \int_{-H}^{x_p} (kq_1q_2 y' / (m [(H+x)^2 + (R+H-y)^2]^{D/2} \sqrt{1+y'^2}))^{1/(1+X)} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx. \quad (27)$$

现在, 考虑最简单的情况, 即 A 和 B 之间以直线相连接的情况, 于是有

$$y = H + x. \quad (28)$$

将 (28) 式代入 (27) 式, 并作置换 $x = -z$, 可得

$$v_p^2 = \int_{-x_p}^H (kq_1q_2 / (m [(H-z)^2 + (R+z)^2]^{D/2}))^{1/(1+X)} \frac{z}{\sqrt{2}^{X/(1+X)}} dz, \quad (29)$$

并根据数值积分的方法进行计算.

下面进行具体的推导和计算

例 1 已知图 1 带电大球体及带电小球的 $\frac{kq_1q_2}{m}$
 $= 3.99 \times 10^{14} \text{ m}^3 / \text{s}^2$, 带电大球体半径 $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$, $H = R/10$, 试对图 1 问题求解 v_B^2 , 并同时导出改进的库仑定律及牛顿第二定律.

解 首先将能量守恒定律和原有的库仑定律及牛顿第二定律 (即在 (10) 式中 $D = 2$, 在 (15) 式中 $X = 0$) 计算的各量代入 (17) 式, 得到

$$C_0 = 571.4215.$$

此时根据能量守恒定律计算的 $v_B^2 = 1.0767 \times 10^7$, 根据原有的库仑定律及牛顿第二定律计算的 $v_B^2 = 1.1351 \times 10^7$, 两者相差 5.4%。

由于 C_0 不等于零, 就可以用最优化方法确定 D 和 X

目前应用的最优化方法可以分为 2 类: 一类可以不依赖初值, 但程序复杂; 另一类要求初值足够好, 但程序简单. 此处采用后一类中的搜索法^[3].

先固定 D 值, 令 $D = 2$, 然后搜索 X 值, 当 $X = 0.0146$ 时 C 达到最小值 139.3429; 然后固定 X , 搜索 D 值, 当 $D = 1.99989$ 时 C 达到最小值 137.3238; 然后固定 D 值, 搜索 X 值, 当 $X = 0.01458$ 时 C 达到最小值 137.3231; 由于两次搜索后的 C 值极为接近, 于是可以停止搜索, 得到最后结果

$$D = 1.99989, X = 0.01458, C = 137.3231.$$

此时 C 值仅为 C_0 值的 24%。而根据能量守恒定律计算的 $v_B^2 = 1.0785 \times 10^7$, 根据改进的库仑定律及牛顿第二定律计算的 $v_B^2 = 1.1073 \times 10^7$, 两者相差仅 2.7%。

由此得到适用于例 1 的改进的库仑定律及牛顿第二定律如下:

$$\text{改进的库仑定律 } f = \frac{kq_1q_2}{r^{1.99989}};$$

$$\text{改进的牛顿第二定律 } F = ma^{1.01458}.$$

最后讨论常维分形形式的库仑定律和牛顿第二定律的量纲问题. 给出 2 种方案:

方案一: 规定 a^{1-X} 和 r^{2-X} 的量纲分别与 a^1 和 r^2 的

量纲一样;

方案二: 在每个公式的右边乘以 1 个专门处理量纲的常数, 例如改进的牛顿第二定律为 $F = K'ma^{1-X}$, 其中 K' 的值等于 1, 其量纲则需要适当选取, 使公式左右的量纲一样.

本文采用方案一, 其优点是可以不改变公式的形式. 而方案二需要改变公式的形式. 当然, 是否还有更好的方案, 还可以进一步讨论.

5 结论

库仑定律及牛顿第二定律是根据实验结果总结出来的. 文中实例表明原有的库仑定律及牛顿第二定律需要改进. 为了从理论上导出这 2 个定律, 可以根据能量守恒定律, 用变维分形方法改进库仑定律及牛顿第二定律后, 同时导出改进的库仑定律和牛顿第二定律.

参考文献

- 1 付昱华. 非平方反比引力定律. 沙洋师专学报, 2002, (6): 67-69.
- 2 付昱华. 改进的牛顿万有引力公式. 自然杂志, 2001, (1): 58-59.
- 3 付昱华. 水星进动问题新解. 天文学报, 1989, (4): 350-354.
- 4 Turcotte D L. Fractals and chaos in geology and geophysics. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 1-22.
- 5 付昱华. 流体力学中的变维分形. 第二届全国计算水力学会议论文集. 武汉: 中国水利学会水力学专业委员会, 1993. 202-207.
- 6 付昱华. 分形技术在油气勘探应用中的改进 - 变维分形技术. 中国海上油气(地质), 1994, (3): 210-214.
- 7 Fu Yuhua. Analysed and fractal single point method for solving hydraulic problems in ocean engineering [i. e., SPE (Society of Petroleum Engineers) 29986]. Beijing: International meeting on petroleum engineering, 1995. 347-356.

(责任编辑: 黎贞崇 邓大玉)