DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2003.01.002

广西科学 Guangxi Sciences 2003，10（1）：4～7

等幂和的末位数字及其分解性质*

Last Digits of Sum of Equal Powers and Their Decomposition Properties

王云葵
Wang Yunkui

（广西民族学院数学与计算机科学系　南宁市大学路　530006）
（Dept. of Mathematics and Computer Science，Guangxi University for Nationalities，Daxuelu，Nanning，Guangxi，530006，China）

摘要　设 p 为奇素数，a_n 为等幂和表成 $2p$ 进制的末位数字，获得等幂和的同余性与等幂和的周期性，从而证明当 $p-1\nmid m$ 时，a_n 是最小正周期为 $4p$ 的周期数列；当 $p-1\mid m$ 时，a_n 是最小正周期为 $4p^2$ 的周期数列，并且完全确定当等幂和表成 10 进制时的末位数字 a_n. 等幂和的数论性质对 G. Giuga 猜想等研究有着重要的作用.

关键词　等幂和　周期性　末位数字

中图法分类号　O156

Abstract　Let p be odd prime number，a_n be last digits of sum of equal powers at $2p$ system. The coresidual property and periodicity of sum of equal powers are obtained. It is proved that a_n is periodic numeral series of minimum positive period of $4p$ when $p-1\nmid m$，and periodic numeral series of minimum positive period of $4p^2$ when $p-1\mid m$. The last digits of sum of equal powers at decimal system are determined. The sum of equal powers plays an important role in the study of Giuga guess.

Key words　sum of equal powers，periodicity，last digit

1　等幂和与 G. Giuga 猜想

等幂和 $S_m(n)=1^m+2^m+\cdots+n^m$ 是一个历史悠久的古老难题，自从 2000 多年前的希腊数学家阿基米德开始，就吸引着国内外数学家的研究兴趣. 1984 年以后，陈景润，黎鉴愚，王云葵[1,2] 等人对此作了大量的研究，获得了前 111 个等幂和公式及其深刻性质，其中前 4 个等幂和公式为：

$S_1(n)=n(n+1)/2$，

$S_2(n)=n(n+1)(2n+1)/6$，

$S_3(n)=n^2(n+1)^2/4$，

$S_4(n)=n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30.$

至今，等幂和问题仍有不少数学家在研究，有不少方法在涌现. 究其原因，不仅是因为等幂和作为级数求和的典范，更重要的是，它的数论性质对 G. Giuga猜想、Bowen 猜想、Bernoulli 数和素数判别等问题的研究有着非常重要的作用. 1950 年 G. Giuga 猜想[3]：p 为素数的充要条件是

$S_{p-1}(p-1)=1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1}\equiv-1(\bmod p)$.

1999 年王云葵[4~6]在研究 G. Giuga 猜想、Bowen 猜想、Bernoulli 数和素数判别时获得了等幂和的许多分解性质及其深刻结果. 设 p 为奇素数，a_n 为等幂和表成 $2p$ 进制的末位数字，本文获得了等幂和的同余性与周期性，从而证明了当 $p-1\nmid m$ 时，a_n 是最小正周期为 $4p$ 的周期数列；当 $p-1\mid m$ 时，a_n 是最小正周期为 $4p^2$ 的周期数列，并且完全确定了当等幂和表成 10 进制时的末位数字 a_n.

2　等幂和的降幂公式与递推公式

引理 1[5]　设 m 为奇数，n 为自然数，则有 $n(n+1)\mid 2S_m(n)$.

引理 2[6]　设 m 为偶数，$p=2$ 或 $p\geqslant 3$ 为奇数，

2002-06-17 收稿。

* 广西民族学院重点科研项目资助（02SXX00001）。

$p^k|n(k\geqslant 1)$，则有

$$S_m(n)\equiv S_m(n-1)\equiv \frac{n}{p}S_m(p-1)(\bmod\ p^k). \quad (1)$$

引理 3[5] 设 p 为素数，则有：当 $p-1\nmid m$ 时，$S_m(p)\equiv S_m(p-1)\equiv 0(\bmod\ p)$；当 $p-1|m$ 时，$S_m(p)\equiv S_m(p-1)\equiv -1(\bmod\ p)$.

定理 1（等幂和降幂公式） 设 m,n,r 为正整数，p 为奇素数，$m\equiv r(\bmod\ p-1)$，$1\leqslant r\leqslant p-1$，则

$$S_m(n)\equiv S_r(n)\quad(\bmod\ 2p) \quad (2)$$

证明 当 $(a,p)=1$ 时，由费马小定理有 $a^{p-1}\equiv 1(\bmod\ p)$，因 $p-1|m-r$，故有 $a^{m-r}\equiv 1(\bmod\ p)$，即对任何整数 a 均有 $a^m\equiv a^r(\bmod\ p)$，又必有 $a^m\equiv a^r(\bmod\ 2)$，故对任何整数 a 均有 $a^m\equiv a^r(\bmod\ 2p)$，令 $a=1,2,\cdots,n$，并且将各式相加即得（2）式.

定理 2（等幂和递推公式） 设 m,n,k 均为正整数，则有

$$S_m(n+k)=S_m(n)+\sum_{r=0}^{m}C_m^rS_r(k)n^{m-r}. \quad (3)$$

证明 $S_m(n+k)-S_m(n)=\sum_{i=1}^{k}(n+i)^m=\sum_{i=1}^{k}(\sum_{r=0}^{m}C_m^rn^{m-r}i^r)=\sum_{r=0}^{m}C_m^rn^{m-r}(\sum_{i=1}^{k}i^r)=\sum_{r=0}^{m}C_m^rn^{m-r}S_r(k)$.

3 等幂和的奇偶性与周期性

定理 3（等幂和奇偶性） 设 m,n 为正整数，则有

$$S_m(n)=\begin{cases}\text{奇数}, n\equiv 1,2(\bmod\ 4);\\ \text{偶数}, n\equiv 0,3(\bmod\ 4).\end{cases} \quad (4)$$

证明 因对任何整数 a 均有 $a^m\equiv a(\bmod\ 2)$，令 $a=1,2,\cdots,n$，并且将各式相加则有 $S_m(n)\equiv S_1(n)\equiv\frac{n(n+1)}{2}(\bmod\ 2)$，由此即得（4）式.

定理 4（等幂和的同余性） 设 m,k 均为正整数，p 为奇素数，$m\equiv r(\bmod\ p-1)$，$1\leqslant r\leqslant p-1$，$0\leqslant l\leqslant 2p-1$，则

$$S_m(2pk+l)\equiv\begin{cases}pk+S_r(l)(\bmod\ 2p), 1\leqslant r\leqslant p-2,\\ (p-2)k+S_{p-1}(l)(\bmod\ 2p), r=p-1,\end{cases} \quad (5)$$

$$S_m(2pk)\equiv S_m(2pk-1)\equiv\begin{cases}pk(\bmod\ 2p), 1\leqslant r\leqslant p-2,\\ (p-2)k(\bmod\ 2p), r=p-1,\end{cases} \quad (6)$$

$$S_m(2pk+p)\equiv\begin{cases}pk+p(\bmod\ 2p), 1\leqslant r\leqslant p-2\\ (p-2)k-1(\bmod\ 2p), r=p-1\end{cases}, p\equiv 1(\bmod\ 4), \quad (7)$$

$$S_m(2pk+p-1)\equiv\begin{cases}pk(\bmod\ 2p), 1\leqslant r\leqslant p-2\\ (p-2)k+p-1(\bmod\ 2p), r=p-1\end{cases}, p\equiv 1(\bmod\ 4), \quad (8)$$

$$S_m(2pk+p)\equiv\begin{cases}pk(\bmod\ 2p), 1\leqslant r\leqslant p-2\\ (p-2)k+p-1(\bmod\ 2p), r=p-1\end{cases}, p\equiv 3(\bmod\ 4), \quad (9)$$

$$S_m(2pk+p-1)\equiv\begin{cases}pk+p(\bmod\ 2p), 1\leqslant r\leqslant p-2\\ (p-2)k-1(\bmod\ 2p), r=p-1\end{cases}, p\equiv 3(\bmod\ 4). \quad (10)$$

证明 由定理 1 及 $(2ip+j)^r\equiv j^r(\bmod\ 2p)$ 有

$$S_m(2pk+l)\equiv S_r(2pk+l)\equiv\sum_{j=1}^{2pk+l}j^r\equiv\sum_{i=0}^{k-1}(\sum_{j=1}^{2p}(2ip+j)^r)+\sum_{j=1}^{l}(2kp+j)^r(\bmod\ 2p)\equiv\sum_{i=0}^{k-1}(\sum_{j=1}^{2p-1}j^r)+\sum_{j=1}^{l}j^r(\bmod\ 2p),$$

即 $$S_m(2pk+l)\equiv kS_r(2p-1)+S_r(l)(\bmod\ 2p), \quad (11)$$

由定理 3 有 $S_r(2p-1)\equiv p(\bmod\ 2)$，由引理 1、引理 2 及引理 3 易知，当 $1\leqslant r\leqslant p-2$ 时，$S_r(2p-1)\equiv 2S_r(p-1)\equiv p(\bmod\ p)$；当 $r=p-1$ 时，$S_{p-1}(2p-1)\equiv 2S_{p-1}(p-1)\equiv p-2(\bmod\ p)$，故有

$$S_r(2p-1)\equiv\begin{cases}p(\bmod\ 2p), 1\leqslant r\leqslant p-2,\\ p-2(\bmod\ 2p), r=p-1,\end{cases} \quad (12)$$

将（12）式代入（11）式即得（5）式，在（5）式中令 $l=0$ 即得（6）式，由引理 3 与定理 3 有

$$S_r(p-1)\equiv\begin{cases}0(\bmod\ 2p), p\equiv 1(\bmod\ 4)\\ p(\bmod\ 2p), p\equiv 3(\bmod\ 4)\end{cases}, 1\leqslant r\leqslant p-2, \quad (13)$$

$$S_{(p-1)}(p-1)\equiv\begin{cases}p-1(\bmod\ 2p), p\equiv 1(\bmod\ 4)\\ -1(\bmod\ 2p), p\equiv 3(\bmod\ 4)\end{cases}, r=p-1, \quad (14)$$

在（5）式中令 $l=p-1$，并利用（13）、（14）式及 $S_m(2pk+p)\equiv S_m(2pk+p-1)+p(\bmod\ 2p)$ 即得（7）～（10）式.

定理 5（等幂和的周期性） 设 m,n,k 为正整数，p 为奇素数，则有

$$S_m(n+pk)\equiv S_m(n)+S_m(pk)+pnk(\bmod\ 2p). \quad (15)$$

$$S_m(n+2pk)\equiv S_m(n)+\begin{cases}pk(\bmod\ 2p), \text{当 } m \text{ 不是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ (p-2)k(\bmod\ 2p), \text{当 } m \text{ 是 } p-1 \text{ 的倍数时}\end{cases}, \quad (16)$$

$$S_m(n+4p)\equiv S_m(n)+\left.\begin{cases}0(\bmod 2p),\text{当 } m \text{ 不是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ -4(\bmod 2p),\text{当 } m \text{ 是 } p-1 \text{ 的倍数时}\end{cases}\right\}, \tag{17}$$

$$S_m(n+4p^2)\equiv S_m(n)(\bmod 2p), \tag{18}$$

$$S_m(n+3p^2)\equiv S_m(n)+pn(\bmod 2p), \tag{19}$$

$$S_m(n+p)\equiv S_m(n)+pn+\left.\begin{cases}0(\bmod 2p),p\equiv 3(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 不是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ p(\bmod 2p),p\equiv 1(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 不是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ p-1(\bmod 2p),p\equiv 3(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ -1(\bmod 2p),p\equiv 1(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 是 } p-1 \text{ 的倍数时}\end{cases}\right\}, \tag{20}$$

$$S_m(n+3p)\equiv S_m(n)+pn+\left.\begin{cases}p(\bmod 2p),p\equiv 3(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 不是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ 0(\bmod 2p),p\equiv 1(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 不是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ -3(\bmod 2p),p\equiv 3(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 是 } p-1 \text{ 的倍数时}\\ p-3(\bmod 2p),p\equiv 1(\bmod 4)\\ \quad\text{且 } m \text{ 是 } p-1 \text{ 的倍数时}\end{cases}\right\}, \tag{21}$$

证明 设 $m\equiv r(\bmod p-1)$，$1\leqslant r\leqslant p-1$，由定理 1 与引理 3 则有当 $0\leqslant j\leqslant r-1$ 时，$n^{r-j}\equiv n(\bmod 2)$，$S_j(pk)\equiv kp(\bmod p)$，当 $r=p-1$ 时，$S_{p-1}(pk)\equiv kS_{p-1}(p-1)\equiv -k(\bmod p)$，故有

$$S_m(n+pk)\equiv S_r(n+pk)\equiv S_r(n)+S_r(pk)+pkn^r+\sum_{j=1}^{r-1}C_r^jS_j(pk)n^{r-j}(\bmod 2p)\equiv S_r(n)+S_r(pk)+pkn+pkn\sum_{j=1}^{r-1}C_r^j(\bmod 2p)\equiv S_m(n)+S_m(pk)+pkn+pkn(2^r-2)(\bmod 2p)\equiv S_m(n)+S_m(pk)+pkn(\bmod 2p),$$

这就得到(15)式，由(15)式令 k 换成 $2k$，并利用(6)式即得(16)式，再由(15)～(16)式即得(17)～(21)式.

4 等幂和的末位数字

定理 6 设 m,n 为正整数，a_n 是等幂和 $S_m(n)$ 表成 $2p$ 进制的末位数字，则数列 a_n 都是周期数列，并且当 $p-1\nmid m$ 时，a_n 是最小正周期为 $4p$ 的周期数列；当 $p-1\mid m$ 时，a_n 是最小正周期为 $4p^2$ 的周期数列.

证明 由(17)、(18)式知，当 $p-1\nmid m$ 时，$a_{n+4p}\equiv S_m(n+4p)\equiv S_m(n)\equiv a_n(\bmod 2p)$，即 $a_{n+4p}=a_n$，故 a_n 是最小正周期为 $4p$ 的周期数列；当 $p-1\mid m$ 时，$a_{n+4p^2}\equiv S_m(n+4p^2)\equiv S_m(n)\equiv a_n(\bmod 2p)$，即 $a_{n+4p^2}=a_n$，故 a_n 是最小正周期为 $4p^2$ 的周期数列.

定理 7 设 m,n 为正整数，a_n 是等幂和 $S_m(n)$ 表成 10 进制的末位数字，$A=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，则数列 a_n 都是周期数列，A 都是有理数，当 $4\nmid m$ 时，a_n 是最小正周期为 20 的周期数列；当 $4\mid m$ 时，a_n 是最小正周期为 100 的周期数列，并且无限循环小数 A 由(22)～(25)式完全确定：

(Ⅰ) 当 $m=4k+1$ 时，A 是循环节为 20 的无限循环小数：$A=0.\overline{13605186556815063100}$； (22)

(Ⅱ) 当 $m=4k+2$ 时，A 是循环节为 20 的无限循环小数：$A=0.\overline{15405104556095065900}$； (23)

(Ⅲ) 当 $m=4k+3$ 时，A 是循环节为 20 的无限循环小数：$A=0.\overline{19605146556415069100}$； (24)

(Ⅳ) 当 $m=4k$ 时，A 是循环节为 100 的无限循环小数：

$$A=0.\overline{17849562334017289566734051289906738451223906178455623940178895627340112895067344512 83906778451623900}, \tag{25}$$

证明 在定理 6 中令 $p=5$ 知，当 $4\nmid m$ 时，a_n 是最小正周期为 20 的周期数列；当 $4\mid m$ 时，a_n 是最小正周期为 100 的周期数列，并且数列 a_n 由 $a_n\equiv S_m(n)\equiv S_r(n)(\bmod 10)(r=1,2,3,4)$ 完全确定：当 $m=4k+1$ 时，$a_n\equiv S_1(n)(\bmod 10)$，令 $n=1,2,\cdots,20$ 则得到循环节为 20 的无限循环小数 A 由(22)式表出；当 $m=4k+2$ 时，$a_n\equiv S_2(n)(\bmod 10)$，令 $=1,2,\cdots,20$ 则得到循环节为 20 的无限循环小数 A 由(23)式表出；当 $m=4k+3$ 时，$a_n\equiv S_3(n)(\bmod 10)$，令 $n=1,2,\cdots,20$ 则得到循环节为 20 的无限循环小数 A 由(24)式表出；当 $m=4k$ 时，$a_n\equiv S_4(n)(\bmod 10)$，令 $=1,2,\cdots,100$ 则得到循环节为 100 的无限循环小数 A 由(25)式表出.

5 数学竞赛问题的解决

1984 年全国高中数学联赛和 1990 年全国初中数学联赛曾出 2 道与等幂和有关的数学竞赛题.

问题 1 设 n 为正整数，a_n 是 $S_2(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的末位数字，则 $A=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是有理数.

问题 2 求 $S_m(123456789)=1^m+2^m+\cdots+123456789^m$ 的末位数字.

问题 1 的解决 由定理 7 易知 $m=2$，即 $4\nmid m$，则有 $S_2(n)$ 的个位数组成的数列 a_n 是最小正周期为 20 的周期数列，故 $A=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是循环节为 20 的无限循环小数，故 A 为有理数.

问题 2 的解决 因 $n = 123456789 = 10 \times 12345679 - 1$，由定理 7 知，当 $4 \nmid m$ 时，$a_n = a_9 = 5$，当 $4 | m$ 时，$a_n = a_{89} = 7$，或根据(6)式有：当 $4 \nmid m$ 时，$a_n \equiv S_m(123456789) \equiv 5 \cdot 12345679 \equiv 5 \pmod{10}$；当 $4 | m$ 时，$a_n \equiv S_m(123456789) \equiv 3 \cdot 12345679 \equiv 7 \pmod{10}$；即当 $4 \nmid m$ 时，$S_m(123456789)$ 的末位数字为 5，当 $4 | m$ 时，$S_m(123456789)$ 的末位数字为 7.

参考文献

1 陈景润，黎鉴愚. 关于等幂和问题. 科学通报，1985，30(4)：316～317.

2 王云葵. 等幂和简洁表示及循环积分法. 西南民族学院学报，2001，27(1)：18～23.

3 Giuseppe Giuga. Su una presumibile proprieta caratteristica dei numeri primi. Ist Lombardo Sci Lett Rend Cl Sci Mat Nat，1950，(3) 14 (83)，511～528；MR 13，725.

4 王云葵. 关于 Bernoulli 数的同余关系. 广西科学，1999，6(4)：250～252.

5 王云葵. Bernoulli 数与素数的判别. 广西科学，2000，7(3)：180～182.

6 王云葵. 关于 Bernoulli 数与 Bowen 猜想. 广西科学，2000，7(1)：14～16.

(责任编辑：黎贞崇)

(上接第 3 页 Continue from page 3)

格的定性基准.

设映射 $f_\lambda: \Gamma \to (0,1]$，使得 $f_\lambda(N_k) = \lambda \in (0,1]$. 易知$(\Gamma, \subseteq)$构成一个格，并且是一个线性序集，映射 f_λ 为$(\Gamma, \subseteq)$到$((0,1], \leqslant)$上的序同态.

定义 7 如果对某 2 个定性基准域 N_i，N_j 有

$$T_{ij}(N_i) = N_j$$

成立，则称 T_{ij} 是从 N_i 到 N_j 的定性基准变换.

令 $f_\lambda(N_k) = e_k$，$(0,1]_\Gamma$ 为所有 $f_\lambda(N_k)$ 组成的集合，即 $(0,1]_\Gamma = \{e_{k1}, e_{k2}, \cdots, e_{kn}\}$. 因为 $(0,1]_\Gamma$ 是一个线性序集，则有

$$(0,1] = (e_{k0}, e_{k1}] \cup (e_{k1}, e_{k2}] \cup \cdots \cup (e_{kn}, e_{kn+1}],$$

此处，$e_{k0} = 0$，$e_{kn+1} = 1$.

显然，$R = \{(e_{kn}, e_{kn+1}]_m\}$ 为 $(0,1]$ 上的一个划分，则在 Γ 与 R 之间存在一个一一对应关系，设为 H_λ，即 $H_\lambda: \Gamma \to R$ 为双射，这里称之为扰动系数映射，它主要是通过调整 Γ 的基准严格程度，使 R 在$(0,1]$间游动.

设 H 为 R 到 N_j 的映射，即 $H: R \to N_j$，对于 Γ 中的某个 N_i，如果存在 $T_{ij}(N_i) = N_j$，则基准变换 T_{ij} 实际上可变为如下的复合映射：$T_{ij} = H \cdot H_\lambda$. 由于 H_λ 为双射，故复合映射又可表示为：$H = T_{ij} \cdot H_\lambda^{-1}$. 实质上，$H$ 是$(0,1]$到 N_j 上的映射，即：$H: (0,1] \to N_j$. 随着基准变换扰动系数映射 H_λ 的不断调整，判断基准域也是随着不断缩放的，即对 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in (0,1]$，$\lambda_1, \lambda_2 \in R$，若 $\lambda_1 < \lambda_2$，则有 $H(\lambda_1) \supseteq H(\lambda_2)$.

于是，H 是基准域簇上由基准拓扑域诱导的集合套. 由模糊集的表现定理，H 给出了 Γ 上的一个模糊集：$A = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda H(\lambda)$，也可写成表达式：$A = \bigcup_{\lambda \in (0,1]} \lambda T_{ij} \cdot H_\lambda^{-1}(\lambda)$.

4 结束语

由定性映射(QM)模型诱导出模糊集及其隶属函数表明，属性量-质特征转化的定性映射，对模糊产生的根源能作出清晰的解释，为进一步探讨隶属度与人工神经元联结权重的确定等问题提供一种新的探索途径.

参考文献

1 冯嘉礼. 感觉数据—特性抽取的定性映射模型. 清华大学学报(机器学习专集)，1998，28(9S2)：248～253.

(责任编辑：黎贞崇)