DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (4): 256- 258

拟对角占优矩阵与非奇异 M-矩阵的判定*

Criteria for Quasi-diagonally Dominant Matrices and Nonsingular M-Matrices

李耀堂　　刘庆兵
Li Yaotang　Liu Qingbing

(云南大学数学系　云南昆明　650091)
(Dept. of Math., Yunnan University, Kunming, Yunnan, 650091, China)

摘要　利用矩阵回路给出拟对角占优矩阵与非奇异 M-矩阵的判定条件,改进和推广相关文献的结果.

关键词　拟对角占优矩阵　非奇异 M-矩阵　矩阵回路
中图法分类号　O151.21

Abstract　Some sufficient conditions for a matrix to be a quasi-diagonally dominant matrix and some criteria for a matrix to be a nonsingular M-matrix are obtained. The known results in the relevant reference were improved and generalized by these results.

Key words　quasi-diagonally dominant matrix, nonsingular M-matrix, matrices circuit

1　定义与符号

M 矩阵是一类应用广泛的矩阵.讨论 M-矩阵及相关的拟对角占优矩阵的判定及性质有着十分重要的意义.本文利用矩阵回路给出拟对角占优矩阵与非奇异 M-矩阵若干新的充分条件,改进和推广了文献[1,2]的相应结果.

定义 1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若存在正对角矩阵 D,使 AD 为严格对角占优矩阵,则称 A 为拟对角占优矩阵.

定义 2　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,满足 $a_{ii}>0, a_{ij}\leqslant 0; j\neq i$,若 A 的所有特征值的实部都为正数,则称 A 为非奇异 M-矩阵.

定义 3　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,定义 $M(A)=(m_{ij})$,其中 $m_{ii}=|a_{ii}|, m_{ij}=-|a_{ij}|; j\neq i$,称 $M(A)$ 为 A 的比较矩阵.

定义 4　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若满足:

1°　A 为对角占优;

2°　A 为不可约;

3°　集合 $K=\{i \mid |a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, 1\leqslant i\leqslant n\}\neq H$,则称 A 为不可约对角占优矩阵.

定义 5　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 的有向图为 $\Gamma(A)$,若 $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_pi_1}\neq 0, p\geqslant 2; i_1, i_2, \cdots, i_p$ 互不相同,则称 $i_1, i_2, \cdots, i_p, i_1$ 为矩阵 A 的一个回路.用 $S(A)$ 表示 $\Gamma(A)$ 中全体回路集合.

定义 6　记实值函数的 n 元数组 $f=(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 的全体为 J_n,这里每个 $f_i: C^{n\times n}\rightarrow R^+$,且只与矩阵非对角元的模有关,$f=(f_1, f_2, \cdots, f_n)\in J_n$ 称为 G-函数,若满足 $|a_{ii}|>f_i(A), i\in N$ 的每个 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 皆为非奇异的.J_n 中 G-函数的全体记作 Y_n.

设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,记 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$,$\Lambda_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|, \Lambda_i'=\sum_{j\neq i}|a_{ji}|; 1\leqslant i, j\leqslant n$.

2　主要结果

引理 1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,$f_i(A)=(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'}), i\in N$,则

$$f(A)=(f_1(A), f_2(A), \cdots, f_n(A))$$

是 G-函数.

证明　对于 $f_i(A)=(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'}), i\in N$,若 $|a_{ii}|>f_i(A)$,则由文献[3,第 235页定理 4]知,$\det A\neq 0$,再由定义 5知,$f_i(A)=(f_1(A), f_2(A), \cdots,$

2001-11-26收稿, 2002-05-20 修回。
* 云南省自然科学基金资助项目 (2000A0001-1M) 和云南省教育厅科研基金资助项目 (9911126).

$f_n(A))$ 是一个 G-函数.

引理 2[4] 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,则下述命题等价:

(Ⅰ) $M(A)$ 是 M-矩阵;

(Ⅱ) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\neq 0, f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\in Y_n$,且

i) $\prod_{i\in V}|a_{ii}|\geqslant\prod_{i\in V}f_i(A), \forall V\in S(A)$;

ii) $J_f(A)=\{V\in S(A)|\prod_{i\in V}|a_{ii}|>\prod_{i\in V}f_i\}\neq H$,且

$\forall V_k\in\theta_f(A)=\{V\in S(A)|\prod_{i\in V}|a_{ii}|=\prod_{i\in V}f_i\}$

有 $\Gamma(A)$ 的顶点序列 $i_1,i_2,\cdots,i_p,j$ 使 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_pj}\neq 0, i\in V_k; j\in V_t\in J_f(A)$.

引理 3[5] $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若 $M(A)$ 为 M-矩阵,则 A 为拟对角占优矩阵.

定理 1 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\neq 0$,若 $\forall V\in S(A)$,有

$$\prod_{i\in V}|a_{ii}|>\prod_{i\in V}(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'}),\qquad(1)$$

则 $M(A)$ 为 M-矩阵,因而 A 为拟对角占优矩阵.

证明 若记 $f_i(A)=(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'})$,则(1)式变为 $\prod_{i\in V}|a_{ii}|>\prod_{i\in V}f_i(A)$,由引理 1 知,$f(A)=(f_1(A),f_2(A),\cdots,f_n(A))$ 为 G-函数,再由引理 2 知,$M(A)$ 为 M-矩阵,故 A 为拟对角占优矩阵.

定理 2 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\neq 0$,若 $\forall V\in S(A)$,有

$$\prod_{i\in V}|a_{ii}|\geqslant\prod_{i\in V}(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'}),$$

$$J_f(A)=\{V\in S(A)|\prod_{i\in V}|a_{ii}|>\prod_{i\in V}(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'})\}\neq H,$$

且对 $\forall V_k\in\theta_f(A)=\{V\in S(A)|\prod_{i\in V}|a_{ii}|=\prod_{i\in V}(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'})\}$,有 $\Gamma(A)$ 的顶点序列 $i,i_1,\cdots,i_p,j$,使 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_pj}\neq 0$,其中 $i\in V_k, j\in V_t\in J_f(A)$. 则 $M(A)$ 为 M-矩阵,因而 A 为拟对角占优矩阵.

证明 (证明过程类似定理 1)

注: 对于 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,由于 $\frac{1}{2}(\Lambda_i+\Lambda_i')\geqslant(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'})$,故若 $|a_{ii}|>\frac{1}{2}(\Lambda_i+\Lambda'_i)$,则必有 $|a_{ii}|>(\overline{\Lambda_i})(\overline{\Lambda_i'})$,但反之未必,即该定理 2 的条件比文献[1]中主要结论定理 1 的条件弱.

例 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&1\\3&4&6\end{bmatrix}$,则 $\Gamma(A)$ 有 3 个回路 V_1,V_2 和 V_3,其中 V_1 含有定点 1 和 3, V_2 含有定点 2 和 3, V_3 含有定点 1, 2, 3. 因为

$4|a_{22}||a_{33}|=4\times2\times6=48$, $(\Lambda_2+\Lambda'_2)(\Lambda_3+\Lambda'_3)=6\times9=54$,

故 $4|a_{22}||a_{33}|<(\Lambda_2+\Lambda'_2)(\Lambda_3+\Lambda'_3)$,所以 A 不满足文献[1]定理 1 的条件,由文献[1]的结论无法判定 A 是否为拟对角占优矩阵. 另一方面,经直接计算知, 3 个回路均满足定理 1 的条件,由定理 1 知, A 为拟对角占优矩阵. 所以定理 1 改进了文献[1,定理 1]的结果.

下面我们给出拟对角占优矩阵和非奇异 M-矩阵另外几个判别定理,为了讨论方便,先引入记号:

$N_1\oplus N_2=N=\{1,2,\cdots,n\}$, $\Lambda_i=\Lambda_{i_1}+\Lambda_{i_2}$, $\Lambda_{i_1}=\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|$, $\Lambda_{i_2}=\sum_{j\in N_2}|a_{ij}|$,

$N_1=\{i||a_{ii}|>\Lambda_i,1\leqslant i\leqslant n\}$, $N_2=\{i||a_{ii}|\leqslant\Lambda_i,1\leqslant i\leqslant n\}$.

$L^{n\times n}=\{A=(a_{ij})|A\in R^{n\times n},a_{ij}\leqslant 0,\forall j\neq i\}$.

定理 3 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$,若存在 $x\in[1/2,1)$, $\forall i\in N_1, j\in N_2$,恒有

$$[(1-x)|a_{ii}|-x\Lambda_{i_1}][(1-x)|a_{jj}|-x\Lambda_{j_2}]>x^2\Lambda_{i_2}\Lambda_{j_1}\qquad(2)$$

则 A 为拟对角占优矩阵,若还有 $A\in L^{n\times n}$,则 A 是 M-矩阵.

证明 令 $R_i=\frac{(1-x)|a_{ii}|-x\Lambda_{i_1}}{x\Lambda_{i_2}}$,当 $\Lambda_{i_1}=0$ 时,取 $R_i=+\infty$, $\forall i\in N_1$,

$$r_j=\frac{x\Lambda_{j_1}}{(1-x)|a_{jj}|-x\Lambda_{j_2}}, \forall j\in N_2,$$

由(2)式知,对 $\forall i\in N_1, j\in N_2$,有 $R_i>r_j$,选取 W,使得 $\max_{j\in N_2}r_j<W<\min_{i\in N_1}R_i$,作矩阵:

$D=\mathrm{diag}\{d_i|d_i=W,i\in N_2;d_i=1,i\in N_1\}$,

$A_1=AD=(a_{ij}^{(1)})$,

则当 $i\in N_1$, $\Lambda_{i_2}\neq 0$ 时,有 $|a_{ii}^{(1)}|=|a_{ii}|$, $\Lambda_{i_1}^{(1)}=\Lambda_{i_1}$, $\Lambda_{i_2}^{(1)}=W\Lambda_{i_2}$,故

$$\begin{aligned}\Lambda_i^{(1)}&=\Lambda_{i_1}^{(1)}+\Lambda_{i_2}^{(1)}=\Lambda_{i_1}+W\Lambda_{i_2}<\Lambda_{i_1}+R_i\Lambda_{i_2}\\&=\Lambda_{i_1}+\{[(1-x)|a_{ii}|-x\Lambda_{i_1}]/x\Lambda_{i_2}\}\cdot\Lambda_{i_2}\\&=\Lambda_{i_1}+[(1-x)|a_{ii}|-x\Lambda_{i_1}]/x=\\&(\frac{1}{x}-1)|a_{ii}|\leqslant|a_{ii}^{(1)}|.\end{aligned}$$

当 $\Lambda_{i_2}=0$ 时,有 $\Lambda_i^{(1)}=\Lambda_i<|a_{ii}|=|a_{ii}^{(1)}|$. 而当 $j\in N_2$ 时,有

$|a_{jj}^{(1)}|=W|a_{jj}|$, $\Lambda_{j_1}^{(1)}=\Lambda_{j_1}$, $\Lambda_{j_2}^{(1)}=W\Lambda_{j_2}$,

由 $r_j=x\Lambda_{j_1}/[(1-x)|a_{jj}|-x\Lambda_{j_2}]<W$,

得到 $x\Lambda_{j_1} < (1-x)W|a_{jj}| - xW\Lambda_{j_2}$,从而有 $x(\Lambda_{j_1} + W\Lambda_{j_2}) < (1-x)W|a_{jj}|$,即

$$x\Lambda_j^{(1)} < (1-x)|a_{jj}^{(1)}|,$$

故 $\Lambda_j^{(1)} < (\frac{1}{x} - 1)|a_{jj}^{(1)}| \leqslant |a_{jj}^{(1)}|$,

于是得出 $A_1 = AD$ 为严格对角占优矩阵,从而 A 是拟对角占优矩阵;若还有 $A \in L^{n\times n}$,则由文献 [5]定理 6知,A 是 M-矩阵 .

若记

$$\Lambda_i' = \Lambda_{i_1}' + \Lambda_{i_2}', \Lambda_{i_1}' = \sum_{j\in N_1} |a_{ji}|, \Lambda_{i_2}' = \sum_{j\in N_2} |a_{ji}|,$$

$$N_1 = \{i \mid |a_{ii}| > \Lambda_i', 1 \leqslant i \leqslant n\}, N_2 = \{i \mid |a_{ii}| \leqslant \Lambda_{i_1}', 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

则类似地可证:

定理 4 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$,若存在 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$,对 $\forall i \in N_1, j \in N_2$,恒有

$$[(1-x)|a_{ii}| - x\Lambda_{i_1}'][(1-x)|a_{jj}| - x\Lambda_{i_2}'] > x^2\Lambda_{i_2}' \cdot \Lambda_{i_1}',$$

则 A 是拟对角占优矩阵,若还有 $A \in L^{n\times n}$,则 A 是 M-矩阵 .

定理 5 设 A 为不可约矩阵,若存在 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$,对 $i \in N_1, j \in N_2$,恒有

$$[(1-x)|a_{ii}| - x\Lambda_{i_1}][(1-x)|a_{jj}| - x\Lambda_{j_2}] \geqslant x^2\Lambda_{i_2} \cdot \Lambda_{j_1} \tag{3}$$

且至少有一严格不等式成立,则 A 是拟对角占优矩阵,若还有 $A \in L^{n\times n}$,则 A 是 M-矩阵 .

证明 若 (3) 式全为严格不等式,就成为定理 3 的情形,结论成立 . 故可设 (3) 式中有等号成立 . 令 $R_i = [(1-x)|a_{ii}| - x\Lambda_{i_1}]/x\Lambda_{i_2}$,当 $\Lambda_{i_2} = 0$时,取 $R_i = +\infty$,$\forall i \in N_1$;$r_j = x\Lambda_{j_1}/[(1-x)|a_{jj}| - x\Lambda_{j_2}]$,$\forall j \in N_2$. 由 (3)得,对 $\forall i \in N_1, j \in N_2$,有 $R_i \geqslant r_j$,且至少有 1个严格不等式成立,现选取 W使 $\max_{j\in N_2} r_j = W = \min_{i\in N_1} R_i$,作矩阵:

$$D = \{d_i \mid d_i = W, i \in N_2; d_i = 1, i \in N_1\},$$

$$A_1 = AD = (a_{ij}^{(1)}),$$

则当 $i \in N_1$,$\Lambda_{i_2} \neq 0$时,有 $|a_{ii}^{(1)}| = |a_{ii}|$,$\Lambda_{i_1}^{(1)} = \Lambda_{i_1}$,$\Lambda_{i_2}^{(1)} = W\Lambda_{i_2}$,

$$\Lambda_i^{(1)} = \Lambda_{i_1}^{(1)} + \Lambda_{i_2}^{(1)} = \Lambda_{i_1} + W\Lambda_{i_2} \leqslant \Lambda_{i_1} + R_i \cdot \Lambda_{i_2} = \Lambda_{i_1} + \{[(1-x)|a_{ii}| - x\Lambda_{i_1}] \div x\Lambda_{i_2}\} \times \Lambda_{i_2} = \Lambda_{i_1} + [(1-x)|a_{ii}| - x\Lambda_{i_1}] \div x = (\frac{1}{x} - 1)|a_{ii}| \leqslant |a_{ii}| = |a_{ii}^{(1)}|.$$

当 $\Lambda_{i_2} = 0$时,有

$$\Lambda_i^{(1)} = \Lambda_i < |a_{ii}| = |a_{ii}^{(1)}|.$$

当 $j \in N_2$,有 $|a_{jj}^{(1)}| = |a_{jj}|$,$\Lambda_{j_1}^{(1)} = \Lambda_{j_1}$,$\Lambda_{j_2}^{(1)} = W\Lambda_{j_2}$,由

$$r_j = x\Lambda_{j_1} \div [(1-x)|a_{jj}| - x\Lambda_{j_2}] \leqslant W,$$

得 $x\Lambda_{j_1} \leqslant (1-x)W|a_{jj}| - xW\Lambda_{j_2}$,从而有 $x(\Lambda_{j_1} + W\Lambda_{j_2}) \leqslant (1-x)W|a_{jj}|$,即

$$x\Lambda_j^{(1)} \leqslant (1-x)|a_{jj}|, 故 \Lambda_j^{(1)} \leqslant (\frac{1}{x} - 1)|a_{jj}^{(1)}| \leqslant |a_{jj}^{(1)}|.$$

由此知 A_1 为不可约,对角占优且至少有一行为严格对角占优的,即 A_1 为不可约对角占优矩阵;从而 A_1 为拟对角占优矩阵,由此知 A 是拟对角占优矩阵 . 若还有 $A \in L^{n\times n}$,则 A 是 M-矩阵 .

定理 6 设 A 是不可约矩阵,若存在 $x \in [\frac{1}{2}, 1)$,$\forall i \in N_1, j \in N_2$,恒有

$$[(1-x)|a_{ii}| - x\Lambda_{i_1}'][(1-x)|a_{jj}| - x\Lambda_{j_2}'] \geqslant x^2\Lambda_{i_2}' \cdot \Lambda_{j_1}',$$

且至少有一严格不等式成立,则 A 是拟对角占优矩阵;若还有 $A \in L^{n\times n}$,则 A 是 M-矩阵 .

证明 (此定理证明类似定理 5)

注: 若取 $x = \frac{1}{2}$,则定理 3~ 6即为文献 [2]中的定理 3~ 6.

参考文献

1 孙玉祥,吕洪斌.广义对角占优矩阵与非奇异 M矩阵的判定.厦门大学学报, 2001, 40(5): 1011~ 1016.

2 高益明.矩阵广义对角占优和非奇的判定.工程数学学报, 1988, 11.

3 陈公宁.矩阵理论与应用.北京:高等教育出版社, 1990.

4 逄明贤,孙玉祥. M-矩阵的等价表征.应用数学, 1995, 8 (1): 44~ 50.

5 Sun Yuxiang. An improvement on a theorem by Ostrowski and application. Northeastern Math J, 1991, 7(4): 479~ 502.

6 Beauwens R. Strictly diagonal dominance. SIAM J Numer Anal, 1976, 13: 1.

(责任编辑: 黎贞崇)