DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.04.004
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (4): 253~ 255, 261

# 具有突变率的广义生-灭过程的遍历性*

# Ergodicities for an Extended Birth-Death Process with Catastrophes

吴群英**

Wu Qunying

(桂林工学院基础部　桂林市建干路 12号　541004)

(Dept. of Basic Sci., Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　给出具有突变率的广义生－灭过程的遍历与指数遍历的充分必要条件，以及强遍历的充分条件.

关键词　广义生-灭过程　遍历　指数遍历　强遍历

中图法分类号　O211.62

**Abstract**　An extended birth-death process with catastrophes is studied. The necessary and sufficient conditions of ergodicity and exponential ergodicity and sufficient condition of strong ergodicity for the process are presented.

**Key words**　extended birth-death process, ergodicity, exponential ergodicity, strong ergodicity

设状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ $Q-$矩阵具有形式

$$Q=\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{\infty} c_i & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ d_1 & T_1 & \lambda_1 & & \\ d_2 & \mu_2 & T_2 & \lambda_2 & \\ d_3 & & \mu_3 & T_3 & \lambda_3 \\ \cdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

其中 $\lambda_i>0, d_i\geqslant 0, c_i\geqslant 0, i\geqslant 1; \mu_i>0, i\geqslant 2, T_1=-(\lambda_1+d_1), T_i=-(\lambda_i+\mu_i+d_i), i=2,3,\cdots$. 显然 $Q$ 是保守的，如 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i<\infty$，则 $Q$ 是全稳定的，$Q$ 过程一定存在，例如 Feller最小 $Q$过程，参见文献[1~3]；否则 $Q$是单瞬时的，这时，$Q$过程不一定存在，参见文献[4]. (1)式的 $Q$矩阵可以看成是具有突变率 $d_i$ 的广义生-灭过程(特别当 $d_1>0, c_1>0, d_i=0, c_i=0, i\geqslant 2$时，$Q$即为通常的生-灭过程)，同时，它也可以看成是人口过程(当 $c_i=0, i\geqslant 2$时). 因此，对其进行研究是很有意义的. 本文作者在文献[5, 6]的基础上，对具有(1)式的全稳定 $Q$矩阵的遍历、指数遍历、强遍历性进行了研究，获得了遍历、指数遍历的充分必要条件，以及强遍历的充分条件.

## 1　引理

为方便，文中分别简称具有(1)式的 $Q$矩阵和由此确定的 $Q$过程为 $Q$矩阵和 $Q$过程，且恒设 $c\triangleq\sum_{i=1}^{\infty} c_i<\infty$，即 $Q$矩阵是全稳定的，恒记 $q_n^{(j)}\triangleq d_n, j=1,2,\cdots,n-1, q_n^{(n)}=\mu_n+d_n, n\geqslant 1, F_0^{(0)}\triangleq 1, F_k^{(0)}=\dfrac{\sum_{j=0}^{k-1} q_k^{(j+1)}F_j^{(0)}}{\lambda_k}, k\geqslant 1; a_0\triangleq 0, a_k\triangleq\dfrac{1+\sum_{j=0}^{k-1} q_k^{(j+1)}a_j}{\lambda_k}, k\geqslant 1$；如 $d\triangleq\inf_{i\geqslant 1} d_i>0$，对 $0<\lambda<\min(c,d)$，相应地记 $q_n^{(j)}(\lambda)\triangleq d_n-\lambda, j=1,2,\cdots,n-1, q_n^{(n)}(\lambda)=\mu_n+d_n-\lambda, \mu_1\triangleq 0, n\geqslant 1, F_0^{(0)}(\lambda)\triangleq 1, F_k^{(0)}(\lambda)\triangleq\dfrac{\sum_{j=0}^{k-1} q_k^{(j+1)}(\lambda)F_j^{(0)}(\lambda)}{\lambda_k}, k\geqslant 1, a_0(\lambda)\triangleq 0, a_k(\lambda)\triangleq\dfrac{1+\sum_{j=0}^{k-1} q_k^{(j+1)}(\lambda)a_j(\lambda)}{\lambda_k}, k\geqslant 1$. 为证明下面定理，先引入引理1.

引理1　令

$z_0=0, z_1>0, z_{i+1}-z_i=$

---

2001-05-29收稿.

* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19871006).

** 中南大学在读博士.

$$\frac{\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j+1)}(z_{j+1}-z_j)-1}{\lambda_i}, i \geqslant 1,$$

则 $\quad z_{n+1}-z_n = z_1 F_n^{(0)} - a_n, n \geqslant 0.$ $\hfill (2)$

相应地如 $d \triangleq \inf_i d_i > 0, c > 0$,对 $0 < \lambda < \min(c,d)$,令 $z_0(\lambda) = 0, z_1(\lambda) > 0$,

$$z_{i+1}(\lambda) - z_i(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} q_i^{(j+1)}(\lambda)(z_{j+1}(\lambda) - z_j(\lambda)) - 1}{\lambda_i}, i \geqslant 1,$$

则 $\quad z_{n+1}(\lambda) - z_n(\lambda) = z_1(\lambda) F_n^{(0)}(\lambda) - a_n(\lambda), n \geqslant 0.$ $\hfill (3)$

证明　用归纳法. 当 $n=0$时,因 $z_1 - z_0 = z_1 = z_1 F_0^{(0)} - a_0$,所以(2)式成立.

设当 $k < n$时(2)式已成立,则

$$z_{n+1} - z_n = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} q_n^{(j+1)}(z_{j+1}-z_j) - 1}{\lambda_n} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} q_n^{(j+1)}(z_1 F_j^{(0)} - a_j) - 1}{\lambda_n} = \frac{z_1 \sum_{j=0}^{n-1} q_n^{(j+1)} F_j^{(0)}}{\lambda_n} - \frac{1 + \sum_{j=0}^{n-1} q_n^{(j+1)} a_j}{\lambda_n} = z_1 F_n^{(0)} - a_n.$$

故(2)式成立,类似可证(3)式,引理1证毕.

## 2　主要结果

**定义 1**　转移函数 $P = (p_{ij}(t); i,j \in E, t \geqslant 0)$称为遍历的,如果存在正概率分布 $c = (c_j, j \in E)$使

$$p_{ij}(t) \to c_j, t \to \infty, \forall i,j \in E; \tag{4}$$

$P = (p_{ij}(t); i,j \in E, t \geqslant 0)$称为指数遍历的,如果还存在某 $U > 0$,使

$$|p_{ij}(t) - c_j| = O(e^{-Ut}), t \to \infty, \forall i,j \in E;$$

如(4)式加强为　$\lim_{t\to\infty} \sup_{i \in E} \sum_{j \in E} |p_{ij}(t) - c_j| = 0$,

则称 $P = (p_{ij}(t); i,j \in E, t \geqslant 0)$为强遍历的.

关于以上3种遍历性,由 Tweedie[7,8]得到判别准则:

**命题 1**　设 $Q = (q_{ij}; i,j \in E)$是一个全稳定 $Q$-矩阵,$F = (f_{ij}(t); i,j \in E, t \geqslant 0)$是最小 $Q$-函数,$H$是状态空间 $E$的一个有限非空子集,则

(Ⅰ) $F$遍历的充分必要条件是,方程

$$\begin{cases} \sum_{j \in E} q_{ij} y_j + 1 \leqslant 0, i \notin H, \\ \sum_{i \in H} \sum_{j \neq i} q_{ij} y_j < \infty. \end{cases} \tag{5}$$

有有限非负解;

(Ⅱ) $F$指数遍历的充分必要条件是对某 $\lambda > 0$,但 $\lambda < q_i, \forall i \in E$方程

$$\begin{cases} \sum_{j \in E} q_{ij} y_j + \lambda y_i + 1 \leqslant 0, i \notin H, \\ \sum_{i \in H} \sum_{j \neq i} q_{ij} y_j < \infty. \end{cases}$$

有有限非负解;

(Ⅲ) $F$强遍历的充分必要条件是方程(5)有非负一致有界解.

**定理 1**　遍历性　设 $Q$过程是常返的,如

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)} < \infty, \tag{6}$$

则 $Q$过程遍历的充分必要条件是

$$a \triangleq \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} F_k^{(0)}} < \infty. \tag{7}$$

注: (i). 必要性不需条件(6),

(ii) 条件(6), (7)可相应改为

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left( \sum_{k=0}^{n-1} (F_k^{(0)} - a_k) \right) < \infty \text{ 及 } a \leqslant 1.$$

**定理 2**　指数遍历性　设 $Q$过程是常返的,且 $d \triangleq \inf_{i \geqslant 1} d_i > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(0)}(\lambda) < \infty, 0 < \lambda < \min(d,c), \tag{8}$$

则 $Q$过程指数遍历的充分必要条件是对某 $0 < \lambda < \min(d,c)$,有

$$a(\lambda) \triangleq \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda)}{\sum_{k=0}^{n} F_k^{(0)}} < \infty. \tag{9}$$

同样有类似于定理1的注(i), (ii).

**定理 3**　强遍历性　设

$$R \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n \lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{\mu_n \cdots \mu_1}{\lambda_n \cdots \lambda_1 \lambda_0} \right) = \infty,$$

$$S \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{n+1}} \left( 1 + \frac{\lambda_n}{\mu_n} + \frac{\lambda_n \lambda_{n-1}}{\mu_n \mu_{n-1}} + \cdots + \frac{\lambda_n \cdots \lambda_1}{\mu_n \cdots \mu_1} \right) < \infty.$$

则 $Q$过程强遍历.

由于强遍历是指数遍历的,指数遍历是遍历的,所以有

**推论 1**　如 $R = \infty, S < \infty$,则过程是强遍历的,指数遍历的,遍历的.

## 3　主要结果的证明

**定理 1的证明**　由命题(1),取 $H = \{0\}$,得 $Q$-过程遍历的充分必要条件是方程

$$\begin{cases} \sum_{j} q_{ij} y_j + 1 \leqslant 0, i \geqslant 1, \\ \sum_{j \neq 0} q_{0j} y_j = \sum_{j=1}^{\infty} c_j y_j < \infty \end{cases} \tag{10}$$

有有限非负解．

**必要性** 取 $y_0=0$,且在(10)式的第一个式子取 $i=1$得

$$-(\lambda_1+d_1)y_1+\lambda_1 y_2+1\leqslant 0,$$

所以 $y_1>0$,

设 $\{y_n\}$是方程(10)的有限非负解,则

$$\sum_j q_{ij}y_j+1=\mu_i y_{i-1}-(\lambda_i+\mu_i+d_i)y_i+\lambda_i y_{i+1}+1\leqslant 0,\mu_1\triangleq 0,$$

即

$$y_{i+1}-y_i\leqslant\frac{\mu_i}{\lambda_i}(y_i-y_{i-1})+\frac{d_i}{\lambda_i}y_i-\frac{1}{\lambda_i}=\frac{\mu_i}{\lambda_i}(y_i-y_{i-1})+\frac{d_i}{\lambda_i}\sum_{j=0}^{i-1}(y_{j+1}-y_j)-\frac{1}{\lambda_i}=\frac{\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j+1)}(y_{j+1}-y_j)-1}{\lambda_i},i\geqslant 1,$$

由引理得: $y_{n+1}-y_n\leqslant y_1F_n^{(0)}-a_n,n\geqslant 0$,

所以 $y_{n+1}\leqslant y_1\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n}a_k$,

由于 $y_n\geqslant 0$,故得

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k}{\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}}\leqslant y_1,$$

由此得

$$a\triangleq\sup_{n\geqslant 1}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k}{\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}}\leqslant y_1<\infty.$$

**充分性** 如 $a<\infty$,则取 $y_0=0,y_1\geqslant a,y_{i+1}-y_i=y_1F_i^{(0)}-a_i,i\geqslant 1$,

在上式求和得

$$y_{n+1}=y_1\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n}a_k=\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}\left(y_1-\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k}{\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}}\right)\geqslant\sum_{k=0}^{n}F_k^{(0)}(y_1-a)\geqslant 0.$$

所以 $y_n$非负,且由引理的证明过程知

$$y_{k+1}-y_k=\frac{\sum_{j=0}^{k-1}q_k^{(j+1)}(y_{j+1}-y_j)-1}{\lambda_k},$$

即

$$\lambda_k(y_{k+1}-y_k)=\sum_{j=0}^{k-2}d_k(y_{j+1}-y_j)+(\mu_k+d_k)(y_k-y_{k-1})-1=d_k\sum_{j=0}^{k-1}(y_{j+1}-y_j)+\mu_k(y_k-y_{k-1})-1=d_ky_k+\mu_k(y_k-y_{k-1})-1,$$

整理得 $\lambda_k y_{k+1}-(\lambda_k+d_k+\mu_k)y_k+\mu_k y_{k-1}+1=0$,

所以 $\sum_j q_{kj}y_j+1=\mu_k y_{k-1}-(\lambda_k+\mu_k+d_k)y_k+\lambda_k y_{k+1}+1=0,k\geqslant 1$.

即 $\{y_n\}$满足方程(10)的第1个式子;

又因为

$$y_n=y_1\sum_{k=0}^{n-1}F_k^{(0)}-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\leqslant y_1\sum_{k=0}^{n-1}F_k^{(0)},n\geqslant 1,$$

所以由(6)式得

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_ny_n\leqslant y_1\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sum_{k=0}^{n-1}F_k^{(0)}<\infty.$$

即 $\{y_n\}$满足方程(10)的第2个式子,故 $\{y_n\}$是满足方程(10)的有限非负解,所以 $Q$过程是正常返的．

对于注(ii),只要在上充分性的证明过程中取 $y_1=1$,其余完全类似于上面定理1的证明即可得注(ii).定理1证毕．

**定理2的证明**

因为 $d>0,c>0$,取 $0<\lambda<\min(d,c)$,则有 $\lambda<q_i,\forall i\in E$,在命题(2)取 $H=\{0\}$,得 $Q$过程指数遍历的充分必要条件是方程

$$\sum_{j=0}^{\infty}q_{ij}y_j+\lambda y_i+1\leqslant 0,i\neq 0,\sum_{j\neq 0}q_{0j}y_j=\sum_{j=1}^{\infty}c_jy_j<\infty. \qquad (11)$$

有有限非负解．

在(11)式的第一个式子取 $y_0=0$得

$$\sum_{j=0}^{\infty}q_{ij}y_j+\lambda y_i+1=\mu_i y_{i-1}-(\lambda_i+\mu_i+d_i)y_i+\lambda_i y_{i+1}+\lambda y_i+1\leqslant 0,\mu_1\triangleq 0,$$

即

$$y_{i+1}-y_i\leqslant\frac{\mu_i}{\lambda_i}(y_i-y_{i-1})+\frac{d_i}{\lambda_i}y_i-\frac{1}{\lambda_i}-\frac{\lambda}{\lambda_i}y_i=\frac{\mu_i}{\lambda_i}(y_i-y_{i-1})+\frac{(d_i-\lambda)}{\lambda_i}y_i-\frac{1}{\lambda_i}=\frac{\sum_{j=0}^{i-1}q_i^{(j+1)}(\lambda)(y_{j+1}-y_j)-1}{\lambda_i},$$

由 $\lambda$的取法,有 $d_i-\lambda>0$,所以 $q_n^{(j)}(\lambda),F_k^{(0)}(\lambda),a_k(\lambda)$都是非负的．故后面的证明完全类似于定理1的证明,略．定理2证毕．

**定理3的证明**

考虑生灭率为 $\lambda_i,\mu_i$的生灭过程 $\bar P=(\bar p_{ij}(t);i,j\in E,t\geqslant 0)$,因为 $R=\infty,S<\infty$.故由文献[9]知,

(下转第261页 Continue on page 261)

$$O\left(\frac{p^{\frac{1}{2}+X}}{p}\sum_{u=1}^{2p-1}\left|\sum_{w=1}^{[Wp]}(-1)^{w}w^{k}e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right|\right)=$$

$$-\frac{h(p-1)}{p^{2}}\sum_{\substack{a=1\\ a=b+w}}^{p}\sum_{b=1}^{p}\sum_{w=1}^{[Wp]}(-1)^{w}w^{k}+$$

$$O\left(\frac{p^{\frac{1}{2}+X}}{p}\sum_{u=1}^{2p-1}\left|\sum_{w=1}^{[Wp]}(-1)^{w}w^{k}e\left(-\frac{uw}{2p}\right)\right|\right),$$

由引理 3引理 4可得

$$L_2 \ll \frac{h(p-1)}{p^{2}}p^{k+1}+\frac{p^{\frac{1}{2}+X}}{p}\sum_{u=1}^{2p-1}\frac{p^{k}}{\left|\cos\frac{\pi u}{2p}\right|}\ll p^{k+\frac{1}{2}+X},$$

于是可得

$$L(p,k,W)=h(p-1)p^{k}\left(\frac{W^{k+1}}{k+1}-\frac{W^{k+2}}{k+2}\right)+O(p^{k+\frac{1}{2}+X}).$$

## 参考文献


1 Richard K G. Unsloved Problems in Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1981. 139~140.

2 张文鹏.关于 Lehmer DH问题及其推广.西北大学学报, 1993,(2): 103~108.

3 高丽,赵贞. Lehmer DH数与它的逆之差的分布性质.吉首大学学报, 2001, 22(1): 56~58.

4 Malyshev A V. A generalization of Kloostermann sums and their estimates (in Russian). Vestnik Leningrad Univ, 1960, 15(3): 59~75.

5 Zhang Wenpeng. On the distribution of primitive roots mo-dulo p. Publ Math Debrecen, 1998, 53(3, 4): 245~255.

6 Tom M A. Introduction to Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1976.


(责任编辑:黎贞崇)

---

(上接第 255页 Continue from page 255)

过程 $(\bar{p}_{ij}(t); i,j\in E, t\geqslant 0)$ 是唯一且强遍历的,因此方程

$$\sum_{j\in E}\bar{q}_{ij}y_j+1\leqslant 0, \sum_{j\neq 0}\bar{q}_{0j}y_j<\infty.$$

即方程

$$\lambda_i(y_{i+1}-y_i)+\mu_i(y_{i-1}-y_i)+1\leqslant 0, i\geqslant 1. \tag{12}$$

有非负一致有界解 $\{y_i, i\geqslant 0\}$.

又因为 $\sum_{j\in E}q_{ij}y_j+1=\mu_i(y_{i-1}-y_i)+\lambda_i(y_{i+1}-y_i)-d_iy_i+1\leqslant \mu_i(y_{i-1}-y_i)+\lambda_i(y_{i+1}-y_i)+1$;

故 $\{y_i, i\geqslant 0\}$ 也是 $\sum_{j\in E}q_{ij}y_j+1\leqslant 0$ 的非负一致有界解,且

$$\sum_{j=1}^{\infty}c_jy_j\leqslant \sup_i y_i\sum_{j=1}^{\infty}c_j<\infty.$$

故 $\{y_i; i\geqslant 0\}$ 为(5)的非负一致有界解,因而 $Q$-过程强遍历.

## 参考文献


1 Feller W. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes. Trans Ann Math Soc, 1940, 48: 488~515.

2 Feller W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. Ann Math, 1957, 65(3): 527~570.

3 Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on L. Acta Math, 1957, 97: 1~46.

4 侯振挺,邹捷中,张汉君等.马尔可夫过程的 $Q$-矩阵问题.长沙:湖南科学技术出版社, 1994.

5 吴群英.广义非保守生-灭 $Q$过程.广西科学, 2002, 9(1): 6~8.

6 吴群英.具有突变率的广义生-灭过程的唯一性.广西科学, 2002, 9(3): 171~173.

7 Anderson W J. Continuous-time markov chains. Springer, Series in Statistics. Springer-Verlag. New York. 1991.

8 Tweedie R L. Criteria for ergodicity, exponential ergodicity and strong ergodicity of Markov processes. J Appl Prob, 1981, (18): 122~130.

9 Zhang H J, Chen A Y, Lin X, et al. The strong ergodicity of monotone transition function. Statistics and Probability Lettes, 2001, 55: 63~69.


(责任编辑:黎贞崇)