DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.04.003
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (4): 250-252

一类 Liénard型方程周期解及概周期解的存在唯一性和渐近稳定性

On Existence, Uniqueness and Asymptotic Stability of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions for Liénard-type Equations

蒋贵荣　　罗桂烈
Jiang Guirong　Luo Guilie

(广西师范大学数学与计算机科学学院　桂林市育才路 3号　541004)
(College of Math. and Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　应用 V-函数法讨论具有强迫项的 Liénard方程 $\ddot{x}+f_0(x)\dot{x}+f_1(x)\dot{x}^2+g(x)=e(t)$ 周期解与概周期解存在唯一性和渐近稳定性.

关键词　Liénard型方程　周期解　概周期解　V-函数　存在唯一性　一致渐近稳定性
中图法分类号　O175.12

Abstract　The sufficient conditions of the existence, uniqueness and asymptotic stability of periodic solutions and almost periodic solutions are abtained for Liénard-type equations by using V-function method.

Key words　Liénard-type equation, periodic solutions, almost periodic solutions, V-function, existence and uniqueness, asymptotic stability

对于 Liénard型方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=e(t), \tag{1}$$

Fink A和 Seifert G在一定条件下证明了它的概周期解的存在性[1,2].现考虑比式(1)更一般的 Liénard型方程:

$$\ddot{x}+f_0(x)\dot{x}+f_1(x)\dot{x}^2+g(x)=e(t) \tag{2}$$

的周期解及概周期解的存在性.当(2)式中 $e(t)\equiv 0$ 时,可通过一个非线性变换将(2)式花成(1)式[3],从而得到与(1)式相对应的结果.然而当(2)式为非自治的情形时,因不能引入相应的时间变换,(2)式不能直接化成(1)式,所以这方面的研究成果不多.文献[4]运用指数型二分性只得到(2)式的概周期解存在的充分条件.本文应用 V-函数法证明(2)式概周期解的存在唯一性及概周期解的一致渐近稳定性.

2002-03-18收稿.

1 引理

引理 1[5]　设 $\dot{x}=f(t,x)$ 中的 $f(t,x)\in C(R\times E^n,E^n)$ 对 $x\in E^n$ 关于 t 是一致概周期解的,又它有解 $\varphi(t)$,在 $[t_0,\infty)$ 上有界且 $\overline{\{\varphi(t);t\geqslant t_0\}}=S$ 则方程 $\dot{x}=f(t,x)$ 必有 R 上的有界解 $\psi(t)$,且对一切 $t\in R$ 有 $\psi(t)\subset S$.

引理 2[5]　若方程 $\dot{x}=f(t,x)$ 中的 $f(t,x)$ 满足利普希茨条件,即对 $t\in R_+$, $x,y\in S$.有 $|f(t,x)-f(t,y)|<|x-y|$.又方程的解 $\psi(t)$ 是一致渐近稳定性的,且对 $t\in R_+$ 有 $\psi(t)\subset S$,则它是完全稳定的,从是渐近概周期的.

引理 3[6] 若方程 $\dot{x}=f(t,x)$ 满足标准假设,又 $\varphi(t)$ 是方程在 R 上的弱一致渐近稳定的有界解,则 $\varphi(t)$ 是方程在 R 上仅有的有界解,它是概周期的且 $\mathrm{mod}(\varphi)\subset \mathrm{mod}(f)$.

对方程

$$\ddot{x}+f_0(x)\dot{x}+f_1(x)\dot{x}^2+g(x)=e(t) \tag{3}$$

做假设

(H_1): $f_0(x), f_1(x), g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续可微, $xf_1(x)>0, xg(x)>0, 0<m<f_0(x)<\infty, 0<g'(x)\leqslant n, |f_1(x)|\leqslant T, e(t)\in AP(\mathbf{R})$.

记 $h(x)=\exp(\int_0^x f_1(x)\mathrm{d}x)$,则 $h(x)\geqslant 1$,做变换 $y=h(x)\dot{x}+\int_0^x h(s)f_0(s)\mathrm{d}s$,方程(3)可化为:

$$\begin{cases} h(x)\dot{x}=y-\int_0^x h(s)f_0(s)\mathrm{d}s,\\ h(x)\dot{y}=-h^2(x)g(x)+h^2(x)e(x),\end{cases}\qquad (4)$$

记 $f(x)=h(x)f_0(x), F(x)=\int_0^x h(s)f(s)\mathrm{d}s$,方程(4)可化为:

$$\begin{cases}\dot{x}=\frac{1}{h(x)}y-\frac{1}{h(x)}F(x)\triangleq A(x)y-B(x),\\ \dot{y}=-h(x)g(x)+h(x)e(t)\triangleq -G(x)+h(x)e(t),\end{cases}\qquad (5)$$

$A'(x)=(\frac{1}{h(x)})'=-\frac{f_1(x)}{h(x)}, B'(x)=(\frac{1}{h(x)}F(x))'=\frac{f_1(x)}{h(x)}F(x)+f_0(x)$,
$G'(x)=(h(x)g(x))'=h(x)(f_1(x)g(x)+g'(x)), h'(x)=h(x)f_1(x)$.

做假设

(H_2): $1\leqslant h(x)\leqslant \frac{1}{k}=\sup_{x\in R}h(x)<+\infty, c_2=\sup_{x\in R}G'(x)<+\infty$.

因 $A(x)=\frac{1}{h(x)}$,故 $0<k\leqslant A(x)\leqslant 1$. $|h'(x)|=|h(x)f_1(x)|\leqslant \frac{T}{k}\triangleq d_2$. 由条件($H_1$)可得 $c_2>0$.

2 定理及证明

定理 在由条件(H_1),(H_2)下,下列条件(H_3),(H_4)成立:

(H_3) $k=\sup_{t\in R}|e(t)|=\|e\|$,存在 $c<a<0<b<d$ 使 $g(b)=-g(a)=k$. 又对 $x\in[c,d]$,有

$$k<\min\{\frac{F(d)-F(b)}{h^2(x)}f(x)+g(c), \frac{F(a)-F(c)}{h^2(x)}f(x)-g(d)\}, F(d)\geqslant|F(c)|,$$

$$P=\max\{F(d)-F(b), F(a)-F(c)\}.$$

(H_4) $S=G'(x)-e(t)h'(x)>0, (2+m)TP+m^2(c_2+kd_2)<2mw$.

则方程(3)有唯一概周期解 $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$,它是一致渐近稳定的且 $\mathrm{mod}(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))\subset\mathrm{mod}(e(t))$.

证明 (a)作闭区域 S, S 由下列 $\Gamma_i(i=1,2,\cdots,6)$ 连续组成的闭曲线 Γ 为边界:

$\overline{AB}=\Gamma_1, y=F(x)+F(d)-F(b), c\leqslant x\leqslant b$;
$\overline{BD}=\Gamma_2, y=F(d), b\leqslant x\leqslant d$;
$\overline{DE}=\Gamma_3, F(d)+F(c)-F(a)\leqslant y\leqslant F(d), x=d$;
$\overline{EF}=\Gamma_4, y=F(x)+F(c)-F(a), a\leqslant x\leqslant d$;
$\overline{FC}=\Gamma_5, y=F(c), c\leqslant x\leqslant a$;
$\overline{CA}=\Gamma_6, F(c)\leqslant F(c)+F(d)+F(b), x=c$;

系统(4)的任一轨线 $(x(t),y(t))$ 当 $t=t_0$ 时与 Γ 相遇于 $P_0(x(t_0),y(t_0))\in\Gamma$,那么对一切 $t\geqslant t_0$ 有 $(x(t),y(t))\in S$. 例如:在 Γ_1 上任意点 $P(x,y)$ 的斜率是 $f(x)$,当 $P_0\in\Gamma_1$ 时,过点 P_0 的轨线斜率为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h(x)\dot{y}}{h(x)\dot{x}}=\frac{-h^2(x)g(x)+h^2(x)e(x)}{y-F(x)}\leqslant\frac{h^2(x)(-g(x)+k)}{F(d)-F(b)}<\frac{-h^2(x)(g(x)-g(c))+(F(d)-F(b))f(x)}{F(d)-F(b)}\leqslant f(x).$$

又在 Γ_1 上, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{y-F(x)}{h(x)}=\frac{F(d)-F(b)}{h(x)}>0$. 因此轨线 $(x(t),y(t))$ 与 Γ_1 交于 $P_0(x(t_0),y(t_0))$ 后,当 t 增大时进入 S 内(见图 1);当 $p_0=B$ 时, $\dot{x}=\frac{y-F(b)}{h(x)}=\frac{F(d)-F(b)}{h(x)}>0, \dot{y}=-h(x)(g(b)-e(t))=h(x)(-k+e(t))\leqslant 0$. 如 $\dot{y}<0$,则轨线进入 S 内,如 $\dot{y}=0$,因 $\dot{x}>0$,轨线与 Γ_2 相切且进入 Γ_2;当 $p_0\in\Gamma_2$ 时, $\dot{y}=h(x)(-g(x)+e(t))<h(x)(-g(x)+k)=0$,轨线进入 S 内. 当 $p_0=D$ 时, $\dot{x}=\frac{y-F(x)}{h(x)}=\frac{F(d)-F(d)}{h(x)}=0, \dot{y}=h(x)(-g(d)+e(t))<0$,轨线与 Γ_3 相切且进入 Γ_3;当 $p_0\in\Gamma_3$ 时, $\dot{x}=\frac{y-F(x)}{h(x)}=\frac{y-F(d)}{h(x)}<0$,轨线进入 S 内. 对 $\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6$ 可类似论证. 由引理 1 可知,(4)式有解 $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ 在 S 中,对一切 $t\in\mathbf{R}$.

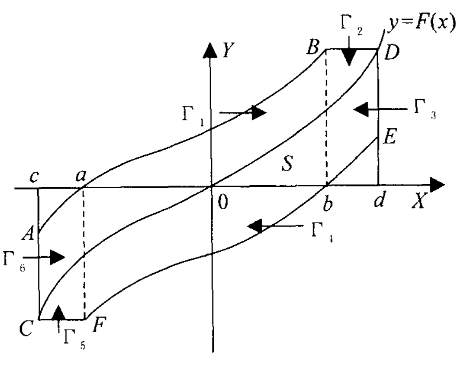

图 1

Fig. 1

(b) 证明 $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ 在 S 中是一致渐近稳定的. 令 $u=x-\bar{x}(t), v=y-\bar{y}(t)$,(5)可化成:

$$\begin{cases} \dot{u} = A(u+\bar{x})(v+\bar{y}) - A(\bar{x})\bar{y} - B(u+\bar{x}) + \\ \quad B(\bar{x}), \\ \dot{v} = -G(u+\bar{x}) + G(\bar{x}) + e(t)[h(u+\bar{x}) - \\ \quad h(\bar{x})], \end{cases} \tag{6}$$

即:

$$\begin{cases} \dot{u} = A'(\bar{x})\bar{y}u + A(\bar{x})v - B'(\bar{x})u + O(\sqrt{u^2+v^2}), \\ \dot{v} = -G'(\bar{x})u + e(t)h'(\bar{x})u + O(\sqrt{u^2+v^2}), \end{cases} \tag{7}$$

考虑(7)式的线性部分:

$$\begin{cases} \dot{u} = A'(\bar{x})\bar{y}u + A(\bar{x})v - B'(\bar{x})u, \\ \dot{v} = -G'(\bar{x})u + e(t)h'(\bar{x})u, \end{cases} \tag{8}$$

因为 $A'(\bar{x})\bar{y} - B'(\bar{x}) = -\frac{f_1(\bar{x})}{h(x)}\bar{y} + \frac{f_1(\bar{x})}{h(x)}\int_0^{\bar{x}} h(s)\cdot f_0(s)\,ds - f_0(\bar{x}) = \frac{f_1(\bar{x})}{h(x)}(F(\bar{x}) - \bar{y}) - f_0(\bar{x})$. 所以(8)式可化成:

$$\begin{cases} \dot{u} = -mu - (f_0(\bar{x}) - m)u + \frac{f_1(\bar{x})}{h(x)}\cdot \\ \quad (F(\bar{x}) - \bar{y})u + v - (1 - A(\bar{x}))v, \\ \dot{v} = -su, \end{cases} \tag{9}$$

取 Liapunov 函数 $V = u^2 - 2muv + (m^2 + \frac{mf_0(\bar{x}) + A(\bar{x})}{s})v^2$,因为 $V = (u+mv)^2 + \frac{mf_0(\bar{x}) + A(\bar{x})}{s}v^2$,而又由假设 $mf_0(\bar{x}) + A(\bar{x}) > 0, s > 0$,所以 V 是正定的.

$\frac{dV}{dt}\Big|_{(9)} = -2mu^2 - 2(f_0(\bar{x}) - m)u^2 + \frac{2f_1(\bar{x})}{h(x)}(F(\bar{x}) - \bar{y})u^2 + 2A(\bar{x})uv + 2mf_0(\bar{x})uv - \frac{2f_1(\bar{x})}{h(x)}(F(\bar{x}) - \bar{y})uv - 2mv^2 + 2m(1 - A(\bar{x}))v^2 - 2mf_0(\bar{x})uv - 2m^2suv - 2A(\bar{x})uv \leqslant -2m(u^2+v^2) + \frac{2f_1(\bar{x})}{h(x)}(F(\bar{x}) - \bar{y})u^2 - \frac{2f_1(\bar{x})}{h(x)}(F(\bar{x}) - \bar{y})uv + 2mv^2 + 2m(1 - A(\bar{x}))v^2 - 2m^2suv$,

因为 $w \leqslant \frac{1}{h(\bar{x})} \leqslant 1, |f_1(\bar{x})| \leqslant T, |F(\bar{x}) - \bar{y}| \leqslant P, s \leqslant c_2 + kd_2$. 所以 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(9)} \leqslant -2m(u^2+v^2) + [2TP + mTP + 2m(1-w) + m^2(c_2+kd_2)](u^2+v^2) = [(2+m)TP + m^2(c_2+kd_2) - 2mw](u^2+v^2)$,由(H4)可知 $\frac{dV}{dt}\Big|_{(9)} < 0$,因此(9)式的零解,从而(4)式的解 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 是一致渐近稳定的. 注意到(5)式的右端满足利普希茨条件,由引理2可知 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 是渐近概周期的,其概周期部分 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 为(4)在 S 中的概周期解,由于一致渐近稳定性是可继承的.从而 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 也是一致渐近稳定的.

(c)证明概周期解的唯一性. 这只需证明(4)式是非常稳定的,即(4)的任意二解之差当 $t \to +\infty$ 时趋向于零.

令 $(x_i(t), y_i(t))$ $(i = 1, 2)$ 是(4)的任意两解,由(a)的证明可知,存在 t_0 使得当 $t \geqslant t_0$ 时, $(x_i(t), y_i(t)) \subset S$. 记 $u(t) = x_1(t) - x_2(t), v(t) = y_1(t) - y_2(t)$,则有

$$\begin{cases} \dot{u} = [A'(x_2(t))y_2(t)u - B'(x_2(t))]u - \\ \quad A(x_2(t))v, \\ \dot{v} = -G'(x_2(t))u + e(t)h'(x_2(t))u, \end{cases} \tag{10}$$

类似(b)的证明可证(10)的零解渐近稳定,从而(4)式非常稳定,它的概周期解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 是唯一的.

(d)(4)式的解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 在中也是弱一致渐近稳定的,由引理3可知, $\mathrm{mod}(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) \subset \mathrm{mod}(e(t))$.

推论 在条件(H1)~(H4)件下,如果 $e(t)$ 是以 W 为周期的周期函数,则(3)式有唯一周期解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$,它的周期亦为 W.

参考文献

1 Fink A. Uniqueness theorems and almost periodic solutions to second order equations. Diff Eqs, 1968, 4: 543~548.

2 Serfert G. Almost periodic solutions of second order nonlinear differentinal equations with almost periodic forcing. Proc Amer Math Soc, 1959, 10: 425~437.

3 Zhou Jin. On the existence and uniqueness of periodic solutions for Liénard-type equations. Nonliear Anal, 1996, 27(12): 1463~1470.

4 周 进.具有强迫项的 Liénard类型方程周期解及概周期解的存在性.数学学报, 1999, 42(3): 571~576.

5 何崇佑.概周期微分方程.北京:高等教育出版社, 1992.

6 Seifert G. Almost periodic solutions and asymptotic stability. Math Anal and Appl, 1968, 21: 134~149.

(责任编辑:黎贞崇)