DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.03.005
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (3): 171~ 173

具有突变率的广义生-灭过程的唯一性*

Uniqueness for an Extended Birth-Death Process with Catastrophes

吴群英
Wu Qunying

(桂林工学院基础部 桂林市建干路 12号 541004)
(Dept. of Basic Sci., Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 给出具有突变率的广义生-灭过程的唯一性的充分必要条件.

关键词 广义生-灭过程 零流出 唯一性
中图法分类号 O211.62

Abstract An extended birth-death process with catastrophes is discussed. The necessary and sufficient conditions of uniqueness for the process are presented.

Key words extended birth-death process, zero-exit, uniqueness

设状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$, Q-矩阵具有形式

$$Q=\begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{\infty} c_i & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \\ d_1 & \mathrm{T}_1 & \lambda_1 & & & \\ d_2 & u_2 & \mathrm{T}_2 & \lambda_2 & & \\ d_3 & & u_3 & \mathrm{T}_3 & \lambda_3 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中 $\mathrm{T}_1=-(\lambda_1+d_1)$, $\mathrm{T}_2=-(\lambda_2+u_2+d_2)$, $\mathrm{T}_3=-(\lambda_3+u_3+d_3)$, $\lambda_i>0, d_i\geqslant 0, c_i\geqslant 0, i\geqslant 1; u_i>0, i\geqslant 2$. 显然 Q是保守的,如$\sum_{i=1}^{\infty} c_i<\infty$,则 Q是全稳定的,Q过程一定存在,例如 Feller最小 Q过程,参见文献 [1~3];否则 Q是单瞬时的,这时,Q过程不一定存在,参见文献 [4]. (1)式的 Q矩阵可以看成是具有突变率 d_i的广义生-灭过程(特别当 $d_1>0, c_1>0$; $d_i=0, c_i=0, i\geqslant 2$时,$Q$即为通常的生-灭过程),有关生-灭过程已获得许多深刻的理想结果,其详细讨论可参阅文献 [5,6];本文研究了具有(1)式的全稳定 Q矩阵的唯一性,获得了全稳定下的唯一性的充分必要条件.

1 引理

为方便,本文分别简称具有(1)式的 Q矩阵和由此确定的 Q过程为 Q矩阵和 Q过程,且恒设 $c\triangleq\sum_{i=1}^{\infty} c_i<\infty$,即 Q矩阵是全稳定的.为证明本文定理,先引入下引理.

引理 设$\{g_n: n\geqslant 1\}$是正数列,$\{f_n: n\geqslant 1\}$是非负数列,对 $N\geqslant 1$, 记

$$F_n^{(N)}\triangleq f_n+g_nf_{n-1}+\cdots+g_ng_{n-1}\cdots g_{N+1}f_N+g_ng_{n-1}\cdots g_N, \tag{2}$$

则对任意自然数 N,M 有$\sum_{n=N}^{\infty} F_n^{(N)}<\infty$ 等价于 $\sum_{n=M}^{\infty} F_n^{(M)}<\infty$.

证明 显然只需证明对任意的自然数 N,有 $\sum_{n=N}^{\infty} F_n^{(N)}<\infty$ 等价于$\sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N+1)}<\infty$.

由 $F_n^{(N)}$的定义,容易验证有关系式:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N+1)}=\sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N)}-\sum_{n=N+1}^{\infty} g_ng_{n-1}\cdots g_{N+1}f_N-\sum_{n=N+1}^{\infty} g_ng_{n-1}\cdots g_N+\sum_{n=N+1}^{\infty} g_ng_{n-1}\cdots g_{N+1}, \tag{3}$$

由(2)式

$$g_ng_{n-1}\cdots g_{N+1}f_N\leqslant F_n^{(N)}, g_ng_{n-1}\cdots g_N\leqslant F_n^{(N)},$$

2001-03-17收稿.
* 广西自然科学基金资助项目 (桂科青 9912008).

又 $g_N > 0$,所以 $g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1} \leqslant \frac{F_n^{(N)}}{g_N}$,

故如 $\sum_{n=N}^{\infty} F_n^{(N)} < \infty$,

则 $\sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N)} < \infty$, $\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1} f_N < \infty$,

$\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n g_{n-1}\cdots g_N < \infty$, $\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1} < \infty$,

由此及(3)式即得 $\sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N+1)} < \infty$.

反之,如果 $\sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N+1)} < \infty$,同样由(2)式得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N+1)} < \infty,$$

由此又得 $\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1} f_N \leqslant f_N \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N+1)} < \infty$, $\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n g_{n-1}\cdots g_N \leqslant g_N \sum_{n=N+1}^{\infty} F_n^{(N+1)} < \infty$,

故由(3)式得 $\sum_{n=N}^{\infty} F_n^{(N)} < \infty$.

引理证毕.

2 主要结果及其证明

定理 1 Q-矩阵零流出(即方程 $Qx = \lambda x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$,对某 $\lambda > 0$(等价于对所有的 $\lambda > 0$)只有零解的充分必要条件是

$$\bar{R} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} ((1+d_n)\lambda_n + u_n(1+d_{n-1})\lambda_n\lambda_{n-1} + \cdots + u_n u_{n-1}\cdots u_2(1+d_1)\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1) = \infty.$$

注 特别对通常的生-灭过程,即 $d_i \equiv 0$, $c_i \equiv 0$, $i \geqslant 2$,则由定理1得Q零流出的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{u_n}{\lambda_n\lambda_{n-1}} + \cdots + \frac{u_n u_{n-1}\cdots u_2}{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1}\right) = \infty.$$

这是周知的结果,所以定理1是通常生-灭过程有关零流出结论的推广.

因为对全稳定保守Q-矩阵,Q过程唯一的充分必要条件是Q零流出,故由定理1立即得:

定理 2(唯一性) Q过程唯一的充分必要条件是 $\bar{R} = \infty$.

定理 1的证明 由(1)式,方程 $Qx = \lambda x$ 即为

$$\begin{cases} -cx_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i = \lambda x_0, \\ d_n x_0 + u_n x_{n-1} - (\lambda_n + u_n + d_n)x_n + \lambda_n x_{n+1} = \lambda x_n, n \geqslant 1, \\ \cdots\cdots \end{cases} \quad (4)$$

其中 $u_1 \triangleq 0$, $c \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} c_i$,由上方程唯一确定解 $x_0, x_1, x_2, \cdots$,取 $x_0 = 1$,把方程(4)的第2个式子改写成

$$d_n + \lambda_n(x_{n+1} - x_n) = (\lambda + d_n)x_n + u_n(x_n - x_{n-1}),$$

即 $x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda + d_n}{\lambda_n}x_n + \frac{u_n}{\lambda_n}(x_n - x_{n-1}) - \frac{d_n}{\lambda_n}$. (5)

下面证明存在自然数 N 及(4)式所确定的 x_n 在 $n \geqslant N$ 是单调不减的.取 $\lambda > c$,由(4)式的第1个式子得:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i = \lambda + c > 2c = \sum_{i=1}^{\infty} 2c_i.$$

所以存在 i,使 $x_i > 2$,记 $N \triangleq \inf\{i, x_i > 2\}$.下用归纳法证明:当 $n \geqslant N$ 时,x_n 单调不减.

当 $k = N$ 时,由(5)式: $x_{N+1} - x_N = \frac{\lambda + d_N}{\lambda_N}x_N + \frac{u_N}{\lambda_N}(x_N - x_{N-1}) - \frac{d_N}{\lambda_N} = \frac{\lambda}{\lambda_N}x_N + \frac{u_N}{\lambda_N}(x_N - x_{N-1}) + \frac{d_N}{\lambda_N}(x_N - 1)$,

由 N 的取法有: $x_{N-1} \leqslant 2 < x_N$,所以 $x_N - x_{N-1} > 0$, $x_N - 1 > 0$,故得 $x_{N+1} \geqslant x_N$;

设当 $N \leqslant k < n$ 时已经成立,则由(5)式显然有: $x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{\lambda_n}x_n + \frac{u_n}{\lambda_n}(x_n - x_{n-1}) + \frac{d_n}{\lambda_n}(x_n - 1) \geqslant 0$.

故 $x_{n+1} \geqslant x_n$,对 $n \geqslant N$ 成立.

又因 $\{1, x_1, x_2, \cdots\}$ 的有界性等价于 $\{1, x_N, x_{N+1}, \cdots\}$ 的有界性,故下寻找 $\{1, x_N, x_{N+1}, \cdots\}$ 的有界性的等价条件.为方便,记 $x_{N-1} \triangleq x_0 = 1$, $x_N > 2$,把(5)重写成

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda + d_n}{\lambda_n}x_n + \frac{u_n}{\lambda_n}(x_n - x_{n-1}) - \frac{d_n}{\lambda_n}, n \geqslant N, x_{N-1} \triangleq 1, x_N > 2, \quad (6)$$

记 $f_n = \frac{\lambda + d_n}{\lambda_n}$, $g_n = \frac{u_n}{\lambda_n}$, $h_n = \frac{d_n}{\lambda_n}$, $a_n = f_n x_n - h_n$, $n \geqslant 2$. $F_n^{(N)}$ 由(2)式定义,

$$H_n^{(N)} \triangleq h_n + g_n h_{n-1} + \cdots + g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1}h_N + g_n g_{n-1}\cdots g_N,$$

由(6)式有

$x_{n+1} - x_n = a_n + g_n(x_n - x_{n-1}) = a_n + g_n(a_{n-1} + g_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2})) = \cdots = a_n + g_n a_{n-1} + g_n g_{n-1} a_{n-2} + \cdots + g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1} a_N + g_n g_{n-1}\cdots g_N(x_N - x_{N-1}) = f_n x_n + g_n f_{n-1} x_{n-1} + g_n g_{n-1} f_{n-2} x_{n-2} + \cdots + g_n g_{n-1}\cdots g_{N+1} f_N x_N + g_n g_{n-1}\cdots g_N(x_N - 1) - H_n^{(N)}$,

由 x_n, $n \geqslant N$ 单调不减及 $H_n^{(N)} \leqslant F_n^{(N)}$ 得:

$(x_N - 2)F_n^{(N)} \leqslant F_n^{(N)}(x_N - 1) - H_n^{(N)} \leqslant x_{n+1} - x_n \leqslant F_n^{(N)}x_n - H_n^{(N)} \leqslant F_n^{(N)}x_n$,

所以 $(x_N-2)\sum_{k=N}^{n}F_k^{(N)}\leqslant x_{n+1}-x_N,\ \frac{x_{n+1}}{x_n}-1\leqslant F_n^{(N)}$, (7)

又因为 $x_N-2>0$,所以如 $\{x_n\}_{n\geqslant N}$ 有界则 $\sum_{k=N}^{\infty}F_k^{(N)}<\infty$.由引理,此式等价于$\sum_{n=1}^{\infty}F_n^{(1)}<\infty$.

反之,如$\sum_{n=N}^{\infty}F_n^{(N)}<\infty$,则由(7)式得

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}-1\right)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}F_n^{(N)}<\infty.$$

又因为$\frac{x_{n+1}}{x_n}-1$与 $\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}$是等价无穷小量,所以 $\sum_{n=N}^{\infty}\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}<\infty$.因此,它的部分和 $S_n=\ln x_{n+1}-\ln x_N$ 有界,等价于$\{x_n\}$有界.

综上所述得: $\{x_n\}$有界等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_n^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda+d_n}{\lambda_n}+\frac{u_n}{\lambda_n}\frac{\lambda+d_{n-1}}{\lambda_{n-1}}+\cdots+\frac{u_nu_{n-1}\cdots u_2}{\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2}\frac{\lambda+d_1}{\lambda_1}\right)<\infty.$$

等价于

$$\bar{R}\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\left((1+d_n)/\lambda_n+u_n/\lambda_n(1+d_{n-1})/\lambda_{n-1}+\cdots+u_nu_{n-1}\cdots u_2(1+d_1)/(\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_1)\right)<\infty.$$

故$\{x_n\}$无界,即 Q零流出的充分必要条件是: $\bar{R}=\infty$. 定理1证毕.

参考文献

1 Feller W. On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes. Trans Ann Math Soc, 1940, 48 488~515.

2 Feller W. On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations. Ann Math, 1957, 65 (3): 527~570.

3 Reuter G E H. Denumerable Markov processes and the associated contraction semigroups on L. Acta Math, 1957, 97: 1~46.

4 侯振挺,邹捷中,张汉君等.马尔可夫过程的 Q-矩阵问题.长沙: 湖南科学技术出版社, 1994.

5 Anderson W J. Continuous-time Markov chains. Series in Statistics, New York: Springer-Verlag. 1991.

6 侯振挺,刘再明,张汉君等.生灭过程.长沙: 湖南科学技术出版社, 2000.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 170页 Continue from page 170)

$$y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\top(t-s)}\left(g\left(s,\frac{1}{\sqrt{2}}y(s-\tau)\right)-f(s)\right)\mathrm{d}s\\-\int_{t}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\top(s-t)}\left(g\left(s,\frac{1}{\sqrt{2}}y(s-\tau)\right)-f(s)\right)\mathrm{d}s\end{pmatrix}. \quad (18)$$

最后,由 $x(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1(t)+y_2(2))$就是方程(5)的唯一概周期解.

例 考虑方程

$$\ddot{x}-(4-\sin t-\cos\sqrt{2}t)x+\frac{(\cos t+\cos\sqrt{2}t)x(t-\tau)}{8(1+x^2(t-\tau))}=f(t). \quad (19)$$

这里,$f(t)$是实连续概周期函数,$|f(t)|\leqslant b$,$t\in R$,$a(t)=4-\sin t-\cos\sqrt{2}t$是定正连续概周期函数,易见 $g(t,x(t-\tau))=\frac{(\cos t+\cos\sqrt{2}t)x(t-\tau)}{8(1+x^2(t-\tau))}$满足条件(6),故由定理1知方程(19)存在唯一的概周期解.

参考文献

1 Berger M S, Chen Y Y. Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations. Nonlinear Analysis TMA, 1992, 19(3): 249~257.

2 Zeng W Y. Almost periodic solutions for nonlinear Duffing equations. Acta Mathematicae Sinica, New series, 1997, 13 (3): 373~380.

3 Yuan R. Existence of almost periodic solutions of Duffing equations. J Beijing Normal University (Natural Science), 1996, 32(3): 296~301.

4 王金义.具有时滞的非线性微分方程的概周期解的存在性及唯一性.数学学报, 1999, 42(3): 511~518.

(责任编辑: 黎贞崇)