DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.03.002
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (3): 164~165, 168

时变广义线性系统的周期解*

The Periodic Solution of Generalized Time-Variable Linear System

梁家荣
Liang Jiarong

(广西大学计算机与信息工程学院　南宁市西乡塘路 10号　530004)
(College of Comp. and Info., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　利用大系统分解法,对时变广义线性系统进行研究,给出周期解存在、唯一稳定的充分条件和实例.
关键词　广义线性系统　周期解　存在性
中图法分类号　O175.12

Abstract　The generalized time-variable linear system is studied by decomposition method. The sufficient conditions for the unique existence of periodic solution are obtained. A example is given to explain the theorem.
Key words　generalized time-variable linear system, periodic solution, existence

正如平面定性理论中极限环的研究一样,空间周期解的研究是高维系统定性理论研究的重要方向,空间周期解理论联系实际,在物理学、化学、生物学、气象学、经济学,人口学以及社会科学的其它分支应用十分广泛.此外,希尔伯特第十六问题的没完全解决也使周期解理论的研究有较重要的理论意义,国内外对正常系统的周期解的研究已得到不少成果[1~5],其主要的方法大多采用极限集方法、拓朴方法、泛函分析法以及比较法,但对于时变广义系统的周期解的研究,一方面由于广义系统已不是传统的数学模型,解的存在唯一性尚未完全解决.另一方面由于它不再存在类似于正常系统的基解矩阵,因而用上述传统的研究方法来处理时变广义系统时会有困难.目前,关于广义系统的周期解的研究还属初创阶段,对定常广义系统已得到了一些结果[6,7],但对于时变广义系统的周期解的研究尚不多见.本文利用大系统分解法对时变广义系统的周期存在性进行研究,得到了一些有意义的结果.

1　主要结果

考虑如下的时变广义系统:

$$E\dot{x} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

其中 $E\in R^{n\times n}$, $\mathrm{rank}E = r < n$ 为常数矩阵, $A(t)\in R^{n\times n}$ 为连续可微的矩阵函数, $f(t)\in R^{n\times 1}$ 为连续可微的向量函数.

定义　如果存在可逆的常量阵 P,Q 使得

$$PEQ = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$|PEQ - PEQPAQ + PAQ| \neq 0, t\in(0,+\infty), \tag{3}$$

I_1 为 $r\times r$ 阶单位阵,则称矩阵对 $(E,A(t))$ 是强正则的.

定理 1　对于广义系统(1),若 $(E,A(t))$ 是强正则的, $A(t+\omega) = A(t)$, $f(t+\omega) = f(t)$,系统(1)有一有界解,则广义系统(1)存在周期为 ω 的周期解.

证明　由于矩阵对 $(E,A(t))$ 是强正则的,故存在可逆阵 P,Q,使(2),(3)成立,记 $PA(t)Q = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix}$,由(3)可知 $A_{22}(t)$ 是可逆的,令 $y(t) = Q^{-1}x(t)$,则(1)等价于

$$\dot{y}(t) = A_{11}(t)y_1(t) + A_{12}(t)y_2(t) + f_1(t), \tag{4}$$

$$0 = A_{21}(t)y_1(t) + A_{22}(t)y_2(t) + f_2(t), \tag{5}$$

其中 $\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = Pf(t)$, $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$,

由(5)有

$$y_2(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)y_1(t) - A_{22}^{-1}(t)f_2(t), \tag{6}$$

把(6)代入(4)可得

$$\dot{y}_1(t) = \bar{A}_{11}(t) + \bar{f}_1(t), \tag{7}$$

2002-01-14收稿, 2002-05-29修回。
* 广西自然科学基金项目资助 (批准号: 0009007)。

其中 $\overline{A}_{11}(t) = A_{11}(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t), \overline{f}_1(t) = f_1(t) - A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)f_2(t)$.

显然有 $\overline{A}_{11}(t+k) = \overline{A}_{11}(t), \overline{f}_1(t+k) = \overline{f}_1(t)$, 由系统 (1) 有一有界解可知 (7) 有一有界解, 由 [1]知 (7) 存在 k-周期解 $h_1(t)$, 再由 (6) 可知 (5) 有一 k-周期解 $h_2(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)h_1(t) - A_{22}^{-1}(t)f_2(t)$, 因此 $x(t) = Q\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ 是系统 (1) 的 k-周期解.

定理 2 设 $(E, A(t))$ 是强正则的, $A(t+k) = A(t), f(t+k) = f(t)$, 若存在常量正定阵 V 及时变矩阵 $W(t)$, $(\lambda_i(W) \leqslant -k < 0, i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得 $E^T VA(t) + A^T(t)VE = E^T W(t)E$, 则广义系统 (1) 存在唯一稳定的 k-周期解.

证明　首先证明周期解的存在性, 由定理 1只要证明 (1) 存在有界解即可. 因为 $f(t)$ 是连续函数且是周期函数, 故存在常量 F 使得 $\| f(t) \| \leqslant F$. 取广义系统 (1) 的广义 Liapunov 函数:

$$v(Ex) = (Ex)^T V(Ex),$$

则 $\dot{v}(Ex)|_{(1)} = (E\dot{x})^T V(Ex) + (Ex)^T V(E\dot{x}) =$
$x^T(t)(A^T(t)VE + E^T VA(t))x(t) +$
$2(Ex(t))^T Vf(t) = (Ex(t))^T W(t)(Ex(t)) +$
$2(Ex(t))^T Vf(t) \leqslant -k\| Ex(t) \|^2 +$
$2\| Ex(t) \| \lambda_{\max}(V) \| f(t) \| \leqslant -k\| Ex(t) \|^2 +$
$2F\lambda_{\max}(V) \| Ex(t) \|$,

注意到不等式: 当 $a > 0, b \geqslant 0$ 时对所有 $z \in [0, +\infty)$ 有 $-az^2 + bz \leqslant -\frac{a}{2}z^2 + \frac{b^2}{2a}$ 从而有 $\dot{v}|_{(1)} \leqslant -\frac{k}{2}\| Ex \|^2 + \frac{2F^2\lambda_{\max}^2(V)}{k}$, 考虑区域:

$$K = \left\{ x(t) \mid \| Ex(t) \|^2 < \frac{8}{k^2}F^2\lambda_{\max}^2(V) \right\},$$

在这个区域的补域

$K^c = \left\{ x(t) \mid \| Ex(t) \|^2 \geqslant \frac{8}{k^2}F^2\lambda_{\max}^2(V) \right\}$ 和 $J = [0, +\infty)$ 所确定的乘积空间 $K^c \times J = [0, +\infty)$ 上存在关于 $Ex(t)$ 的正定函数 $v(Ex) = (Ex)^T V(Ex)$ 使得 $\dot{v}|_{(1)} \leqslant -\frac{k}{4}\| Ex \|^2$, 所以对于广义系统 (1) 的解 $x(t)$, $Ex(t)$ 是一致最终有界的. 下面证明 $x(t)$ 亦是一致最终有界的. 由 $(E, A(t))$ 是强正则的, 易知存在可逆阵使 (2), (3) 成立, 则 (1) 等价于 (4) 和 (5), 由 $Ex(t)$ 是一致最终有界的, 可得 $y_1(t)$ 是一致最终有界的, 再由 (6) 知 $y_2(t)$ 亦是一致最终有界的, 所以 $x(t) = Qy(t)$ 是一致最终有界的, 由定理 1可得广义系统存在 k-周期解 $h(t)$. 下证 (1) 的 k-周期解 $h(t)$ 是唯一的. 事实上, 若 (1) 还存在另一 k-周期解 $H(t)$. 则 $h(t) = h(t) - Q(t)$ 为 (1) 的齐次系统

$$E\dot{x} = A(t)x(t) \tag{8}$$

的非平凡周期解, 所以

$$\lim_{t\to\infty} h(t) \neq 0, \tag{9}$$

另一方面, 由上面的证明可知, 取 (8) 的广义 Liapunov 函数 $v(Ex) = (Ex)^T V(Ex)$ 则

$$\dot{v}|_{(8)} \leqslant -k\| Ex \|^2 \leqslant -\frac{k}{\lambda_{\max}(V)}v(Ex(t))$$

因为 $-\frac{k}{\lambda_{\max}(V)} < 0$ 所以 $\lim_{t\to\infty} v(Ex(t)) = 0$ 因为 $v(Ex(t))$ 关于 $Ex(t)$ 是正定的, 从而有 $\lim_{t\to\infty} Ex(t) = 0$, 此外对于 (8) 作变换 $x(t) = Qz(t), z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$, 则 (8) 等价于如下系统

$$\dot{z}_1(t) = A_{11}(t)z_1(t) + A_{12}(t)z_2(t), \tag{10}$$

$$0 = A_{21}(t)z_1(t) + A_{22}(t)z_2(t), \tag{11}$$

由 $\lim_{t\to\infty} Ex(t) = 0$ 可知 $\lim_{t\to\infty} z_1(t) = 0$, 此外由 (11) 得 $z_2(t) = -A_{22}^{-1}(t)A_{21}(t)z_1(t)$ 所以 $\lim_{t\to\infty} z_2(t) = 0$, 因此对 (8) 的解 $x(t)$ 均有 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, 这与 (9) 矛盾. 故广义系统 (1) 存在唯一的 k-周期解 $h(t)$, 从上述证明易知广义系统 (1) 的任一解, 当 $t \to \infty$ 时均趋于 $h(t)$, 即广义系统 (1) 存在平稳振荡.

2　实例

考虑如下的时变广义系统

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \cos^2 t & 4 - 2\sin t & 0 \\ 3 - \cos^2 t & 2 - \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 2\sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $f_i(t + 2c) = f_i(t), i = 1, 2, 3$, 取 $P = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 易知 $(E, A(t))$ 强正则

取 $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$W(t) = \begin{pmatrix} 3 - \cos^2 t & 0 & 0 \\ 0 & 5 - 3\sin t & 0 \\ 0 & 0 & 3 - 2\sin^2 t \end{pmatrix}$, 容易

(下转第 168页　Continue on page 168)

方法和 J_3 剖分的转轴运算规则表[5],得到新的完备单形 $e(k+1)=j_3(z,d,b)$,记 $e(k+1)$ 的不是 $e(k)$ 顶点的顶点为 $y^+(k+1)=(t^+(k+1),x^+(k+1))$,若 0与 $f(x(k+1))$ 距离足够小,则计算终止,否则置 $k:=k+1$,回到步 1.

下面定理为著名的 Kakutani不动点定理,此定理在数理经济学中有非常重要的应用.

定理 2 设 B 为欧氏空间 R^n 的 n 维紧凸集,$F: B\to P(B)$ 上半连续,则 F 必有不动点.

下面证明定理 1与定理 2等价.

证明 定理 1$\Rightarrow$定理 2

设 B 为欧氏空间 R^n 的 n 维紧凸集,$F: B\to P(B)$ 为 B 的上半连续集值映射,因 B 紧,$F: B\to P(B)$ 上半连续,从而 $F(B)$ 紧,故存在一个方体 C,使得 $F(B)\cup B\subset C$,定义 $G: C\to P(C)$ 使得 $x\in B$ 时,$G(x)=F(x)$,$x\in C\sim B$ 时,原点 O 与 x 的连线与 B 必有唯一的交点 y,令 $G(x)=F(y)$,由 G 的定义可知 $G(B)=F(B)\subset B$ 且 $G: C\to P(C)$ 上半连续,令 $f: C\to P(R^n)$,使得 $f(x)=\{x\}-G(x)$,显然 f 满足定理 1的条件,则由定理 1可知 f 在 C 中存在零点,不妨设 $0\in f(x^0)$,则 $x^0\in G(x^0)\subset B$,而当 $x^0\in B$ 时,$G(x^0)=F(x^0)$,因此 $x^0\in F(x^0)$,即 F 在 B 上有不动点.

定理 2$\Rightarrow$定理 1

设 f,C 同定理 1,定义 $F: C\to P(R^n)$,使得 $F(x)=x-f(x)$,则 $F: C\to P(R^n)$ 上半连续,因 C 紧,故存在紧凸集 B,满足 $F(C)\cup C\subset B$,定义 $G: B\to P(B)$ 如下

$$G(x)=\begin{cases} F(x), & x\in \mathrm{int}C, \\ \omega(F(x)\cup\{0\}), & x\in \partial C, \\ \{0\}, & x\in B\sim C. \end{cases}$$

由定理 2可知 $G: B\to P(B)$ 有不动点 x^0,显然 $x^0\in C$.

若 $x^0\in\partial C$,则 $x^0\in\omega(F(x^0)\cup\{0\})$,从而存在 $\lambda\in[0,1]$,满足 $x^0\in\lambda F(x^0)$,即 $x^0\in\lambda(\{x^0\}-f(x^0))$,设 $x^0_{i0}=a_{i0}$,因 $f_{i0}(x^0)\subset[0,+\infty)$,故 $\lambda=1$,且 $0\in f(x^0)$. 同理可证 $x^0_{i0}=a_{i0}$ 时,$0\in f(x^0)$.

若 $x^0\in\mathrm{int}C$,则 $x^0\in F(x^0)$,即 $x^0\in\{x^0\}-f(x^0)$,因此 $0\in f(x^0)$.

由上可知 f 在 C 中有零点,从而定理 2成立.

参考文献

1 Kulpa W. The Poincare-Miranda theorem. The Amer Math Mon, 1997, 104(6): 545~550.

2 Browder F. Fixed point theory and nonlinear problems. Bull Amer Math Soc, 1983, 9(1): 1~39.

3 Aubin J P. Optima and Equilibria: an introduction to nonlinear analysis. New York: Springer-Verlag, 1998.

4 Dang C. Triangulations and Simplicial Methods. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

5 王则柯.单纯不动点算法基础.广州:中山大学出版社, 1986.

6 范江华,黎培兴. Leray-Schauder不动点的计算.科学通报, 1998, 43(16): 1723~1725.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 165页 Continue from page 165)

检验定理 2的条件得到满足,从而可知(11)存在平稳振荡.

4 结束语

由于广义系统有着许多实际背景,因而一直成为人们研究的热点.广义系统的基本理论至今尚未完全建立起来,作为广义系统理的重要分支广义系统的周期解理论必将成为人们研究的又一课题,本文就导数向量的系数阵为定常奇异阵的情形进行讨论,系统阵为时变广义线性系统的周期解存在性较为复杂,有待进一步的研究.

参考文献

1 Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solution and Almost Periodic Solutions. Springer-Verlag, 1975.

2 王联,王慕明.高维周期耗散系统中的一个平稳振荡定理.中国科学(A辑), 1982, 607~614.

3 王慕秋,李黎明.非线性周期性大系统的平稳振荡.应用数学学报, 1991, 14(2): 220~228.

4 郜奉欣,扬玉华.时滞周期系统解的存在性.应用数学学报, 1990, 13(2): 198~206.

5 张毅,章毅,王慕秋.时变线性大系统在结构扰动下的稳定性与平稳振荡问题.应用数学学报, 1988, 11(4): 404~409.

6 梁家荣.广义系统的周期解.控制理论与应用, 1997, 14(4): 595~598.

7 梁家荣.广义系统的概周期解.科学通报, 1998, 43(2): 325~328.

(责任编辑:黎贞崇)