DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.03.001
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (3): 161~ 163

关于有限群极大子群的极大完备*

On the Maximal Completion of the Maximal Subgroups of Finite Groups

钟祥贵
Zhong Xianggui

(广西师范大学数学系 桂林市育才路 3号 541004)
(Dept. of Math., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 利用有限群极大子群的极大完备的性质,在限制条件较相关文献弱的情形下,研究群的可解或超可解性.

关键词 有限群 极大子群 极大完备 超可解群
中图法分类号 O152.1

Abstract By using the properties of the maximal completion of finite groups, the solvability or supersolvability of a finite group is discussed under weaker conditions.

Key words finite groups, maximal subgroups, maximal completion, supersolvability groups

极大子群在有限群分类问题中扮演着重要的角色.例如 Huppert用极大子群的指数刻画超可解群的著名结果.群 G的 Frattini子群 $\Phi(G)$以及 G的所有非正规子群之交 $L(G)$的研究等. 1959年, Deskins在文献[1]中引进了完备的概念为研究极大子群提供了新的途径.

群 G的极大子群 M的完备定义为不含于 M的子群 C,而 C的 G-不变真子群均含于 M.完备 C的 G-不变真子群之积记为 $K(C)$.显然 $K(C) < C$且 $K(C) \trianglelefteq G$. M在 G中的所有完备作成一个集合,记为 $I(M)$. $I(M)$按集合包含关系作成一个偏序集,其极大元称为 M的极大完备.

近年,关于极大子群的完备和极大完备对有限群结构的影响的研究取得了丰富的成果[1~3].最近,李世荣[3]中证明了下述定理.

定理 A 群 G是超可解的当且仅当对于 G的每个有合数指数的极大子群 M, $I(M)$包含一个极大元 C使得 $|C/K(C)|$无平方因子且 $G= CM$.

定理 B 设 G是一个群.假设对于 G的每个有合数指数的极大子群 M, $I(M)$包含一个极大元 C使得 $C/K(C)$循环,其阶大于或等于 $|G:M|$,那么 G是可解的,且下述结论成立:

(1) G的每个极大子群的指数或为素数或为 4,

(2) 若 G非超可解,则 G有一个同态像与 S_4同构.

本文首先适当修改定理 A中关于 $|C/K(C)|$无平方因子的条件,得到关于群 G可解的一个结果,由此可导出定理 A;其次,在群 G可解的情形,得出定理 B一个更一般的推广.

本文所考虑的群均有限.所用符号和术语同文献[4].

1 定义和基本结果

定义 1 设 M是 G的一个极大子群.如果存在某个素数 p以及不等于 1的正整数 n使 $|G:M| = p^n$,就称 M是 G的一个 p^c-极大子群.

显然, p^c-极大子群是一个特殊的合数指数极大子群.

定义 2 群 X称为群 Y的一个截断,如果 X是 Y的一个子群的同态像.

引理 1[2] 令 G是一个群, $N \trianglelefteq G$使得 G/N有唯一极小正规子群 U/N.令 M是 G的一个极大子群满足: M包含 N,但不包含 U.并且令 C是 $I(M)$的一个极大元,进一步假设 U/N不是 $C/K(C)$的截断,那么:

(1) $N = K(C)$;

(2) C是 UC的极大子群.

2001-10-04收稿, 2001-11-23修回。
* 国家自然科学基金项目资助 (编号: 10161001)。

引理 2　设群 $G=AB$. 子群 A, B 的 Sylow 2-子群的阶不超过 2, 那么 G 是可解的.

证明　与文献 [4]p. 79 引理 4.7 的证明类似.

引理 3　令 D 是 G 的一个子群, $|D|_2 \leqslant 2$ 且 D 在 G 中的指数为素数, 则 G 可解.

证明　令 $|G:D|=p$ (p 为素数). 易见 $P \not\trianglelefteq D$, 这里 P 是 G 的 Sylow p-子群. 由于 $|G:D|$ 与 $|G:P|$ 互素. 故 $G=PD$.

若 $p>2$, 则 $|G|_2=|D|_2 \leqslant 2$, G 为 2-幂零, G 当然可解.

若 $p=2$, 则 $D \trianglelefteq G$. 而 G/D 为 p 阶循环群, D 为 2-幂零群, 故 G 可解.

引理 4[4]　设 M 是群 G 的一个可解极大子群, K 是 G 的非可解正规子群使得 $G=MK$, 那么 $K \cap M \neq 1$.

引理 5[5]　若群 G 有一个正规循环子群 H 使 G/H 为超可解, 则 G 亦超可解.

引理 6　设 G 为 p^3 阶非交换群, G 的方次数 $\exp(G)=p^2$ 且 $|K_1(G)| \geqslant p^2$. 那么 $G \cong D_8$.

证明　若 $p>2$, 直接计算可知方次数为 p^2 的 p^3 阶群其 p 阶元的个数为 p^2-1. 矛盾于 $|K_1(G)| \geqslant p^2$. 故 $p=2$, 而 $G \cong Q_8$ 或 D_8. 又 $|K_1(D_8)|=5$ 而 $|K_1(Q_8)|=1$. 故 $G \cong D_8$.

2　主要结果

定理 1　令 G 是一个群. 假设对于 G 的每个有合数指数的极大子群 M, $I(M)$ 包含一个极大元 C 使得 $C/K(C)$ 超可解, $|C/K(C)|_2 \leqslant 2$, 并且 $G=CM$. 那么 G 是可解的.

证明　*反证法*　设 G 非可解. 选取 G 的正规子群 N 使得 G/N 非可解, 并且 N 有尽可能大的阶. 那么 G/N 有唯一的一个极小正规子群 U/N 并且 U/N 不可解. 记 $\bar{G}=G/N$, $\bar{U}=U/N$. 令 q 为 $|\bar{U}|$ 的最大素因子, $\bar{Q} \in Syl_q(\bar{U})$. 那么 $\bar{Q}$ 在 $\bar{U}$ 中非正规, 从而存在 G 的极大子群 H 使得 $N_{\bar{G}}(\bar{Q}) \subseteq \bar{H}$, 由 Frattini 论断可推得 $\bar{H} \not\geq \bar{U}$. 根据文献 [4], p. 59, 引理 1.11 知 $|\bar{G}:\bar{H}|$ 是合数. 从而 H 在 G 中有合数指数, $H \geqslant N$ 但 $H \not\geq U$. 依定理假设条件, $I(H)$ 包含一个极大元 C 使得 $C/K(C)$ 超可解. $C/K(C)$ 的 Sylow 2-子群的阶不超过 2, 并且 $G=CH$. 显然, U/N 不是可解群 $C/K(C)$ 的同态像. 由引理 1, $N=K(C)$ 且 C 是 UC 的极大子群. 现记 $E=UC$, $T=U \cap C$. 那么 C/N 是 E/N 的一个可解极大子群, U/N 是 E/N 的非可解正规子群且 $E/N=(C/N)(U/N)$. 依引理 4 有 $T/N>1$. 又由于 C/N 超可解, 从而 T/N 作为 C/N 的子群亦超可解. 设 p 是 $|T/N|$ 的最大素因子, $P \in Syl_p(T)$. 那么, PN/N 是 T/N 的非单位正规 Sylow p-子群. 由 PN/N char $T/N \trianglelefteq G/N$ 可得 $PN \trianglelefteq C$ 即 $C \leqslant N_G(PN)$. 现在由于 U/N 是 G/N 的唯一极小正规子群且 U/N 不可解, 所以 PN/N 是 U/N 的真子群, 并且 $F(U/N)=1$. 若 $\mathrm{Core}_{G/N}(N_G(PN)/N) \neq 1$, 那么 $U/N \leqslant \mathrm{Core}_{G/N}(N_G(PN)/N) \leqslant N_G(PN)/N$, 即 $U \leqslant N_G(PN)$, 这蕴含 $PN/N \trianglelefteq U/N$. 进一步可得 $PN/N \leqslant F(U/N)=1$. 矛盾. 因此, $\mathrm{Core}_{G/N}(N_G(PN)/N)=1$ 且 $U \not\leq N_G(PN)$. 现在由 $C \not\leq H$, 我们有 $C \leqslant N_G(PN) \not\leq H$. 记 S 为 $N_G(PN)$ 的任一 G-不变真子群, 则 $SN/N \trianglelefteq N_G(PN)/N$, 从而 $SN/N=1$. 故 $S \leqslant N \leqslant H$, $N_G(PN) \in I(H)$. 又 C 是 $I(H)$ 的极大元, 从而 $C=N_G(PN)$. 考虑 U 到 U/N 的自然同态, 由第一同构定理, $L/N \trianglelefteq U/N$ 等价于 $L \trianglelefteq U$, 于是 $N_{U/N}(PN/N)=N_U(PN)/N=T/N$. 现在可以断言 $PN/N \in Syl_p(U/N)$. 若否, 则可在 U/N 中选取 p-子群 P_1/N, 使 $|P_1/N:PN/N|=p$, $P_1/N \leqslant N_{U/N}(PN/N)=T/N$. 矛盾于 $PN/N \in Syl_p(T/N)$. 所以 PN/N 是 U/N 的 Sylow p-子群. 由 Frattini 推理得 $G/N=N_{G/N}(PN/N)(U/N)$, 从而 $G=N_G(PN)U=UC$, 即 C 为 G 的极大子群. 由假设 $|C/K(C)|_2 \leqslant 2$ 及引理 3 可知 C/N 在 G/N 中有合数指数, 从而 $I(C)$ 有一个极大元 C_1 使得 $G=C_1C$ 且 $|C_1/K(C_1)|_2 \leqslant 2$. 再次利用引理 1, $N=K(C_1)$. 最后, 由 $G/N=(C_1/N)(C/N)$ 及引理 2 得 G/N 可解. 矛盾.

众所周知, 阶无平方因子的群是超可解的. 根据定理 1, 在定理 A 的条件下, 可得 G 是可解的. 假如 G 有合数指数极大子群 M, 则由 $G=CM$ 知 $|G:M|$ 整除 $|C/K(C)|$, 从而 $|G:M|$ 无平方因子. 又 G 可解, $|G:M|$ 应为素数的方幂. 故 $|G:M|$ 是一个素数. 矛盾. 从而 G 中不存在合数指数极大子群 M, G 为超可解. 此即定理 A 的结论.

定理 2　设 G 是可解群. 假如 G 非超可解, 而对于 $|G|$ 的任意一个素因子 p 和每个 p^c-极大子群 M, $I(M)$ 包含一个极大元 C 使得 $C/K(C)$ 循环, 其阶大于或等于 $|G:M|$, 那么 $G/K(C) \cong S_4$.

证明　按假设, G 非超可解. 选取 G 的正规子群 N 使得 G/N 非超可解, 并且 N 有尽可能大的阶. 如果 G/N 有两个不同的极小正规子群 U_1/N 和 U_2/N, 那么由于 $G/N=(G/N)/(U_1/N) \cap (U_2/N)$ 同构于 $(G/N)/(U_1/N) \times (G/N)/(U_2/N)$ 的一个子群, 而且由 N 的选择 $(G/N)/(U_i/N) \cong G/U_i$ ($i=1,2$) 是超可解的. 从而 G/N 亦然. 矛盾. 因此可以假设 G/N 有

唯一的极小正规子群,记为 U/N.当然,由于 G可解,主因子 U/N是初等交换 p-群,p为某个素数.若 U/N循环,则因 $G/N/U/N \cong G/U$超可解,由引理 5,G/N亦超可解.矛盾.故 U/N是非循环的初等交换 p-群.若 $\Phi(G/N) \neq 1$, 则 $U/N \leqslant \Phi(G/N)$, 此时 $G/N/\Phi(G/N)$超可解,G亦然.矛盾.从而 $\Phi(G/N) = 1$.即 G/N中存在不包含 U/N的极大子群 M/N使 $G = UM$, $U \cap M = N$.此时 $|G/M| = |U/N|$,M是一个 p^c-极大子群.

现在可以假设 M是 G的任一个 p^c-极大子群能使 M包含 N而不包含 U.由定理假设,$I(M)$包含一个极大元 C使得 $C/K(C)$循环.而 U/N非循环,故 U/N不是 $C/K(C)$的截断,应用引理 1,$N = K(C)$且 C是 UC的极大子群.同时,$|C/N| \geqslant |G:M|$,故 $|C| \geqslant |U|$.现证 $C \trianglelefteq UC$.若否,则 UC/N不是一个 p-群,从而 C/N也不可能为 p-群.因此,$|C/N| \neq |U:N|$,$|C| > |U|$.令 B是 C在 UC中的一个共轭,且 $B \neq C$.显然,$|BC| \leqslant |UC|$,$|B \cap C| > |U \cap C|$.由此得 $B \cap C \not\leqslant U$.(否则,$B \cap C \leqslant U \cap C$,矛盾).由文献[6]p. 34定理知,$C_{G/N}(U/N) = U/N$.令 $X/N = C_{G/N}(B \cap C/N)$,则 $U \not\leqslant X$.从而 $\mathrm{Core}_{G/N}(X/N) = 1$.然而由于 B/N和 C/N均为交换群,故 X包含 B和 C.因此 $X \not\leqslant M$.设 S是 X的任意一个 G-不变真子群.则 $SN/N \leqslant \mathrm{Core}_{G/N}(X/N) = 1$. $S \leqslant N \leqslant M$.按定义,$X \in I(M)$.利用 C的极大性得 $B \leqslant X = C$.与 B的选取矛盾.这证明了 $C \trianglelefteq UC$.证明过程同时表明: UC/N是一个 p-群.考虑到 C/N是 UC/N的极大子群,从而 $|U:U \cap C| = |UC:C| = |UC/N:C/N| = p$,并且 $U \cap C > N$.记 $T = U \cap C$,则 $T/N > 1$.因为 T/N是 C/N的子群,故 T/N循环.又 T/N是 U/N的子群,而 U/N是初等交换 p-群.可见 T/N是 p阶循环群.从而 U/N是 p^2阶初等交换 p-群.

最后,由于 $|C| \geqslant |U|$.故 U是 UC的真子群.由 p-群的性质,我们可以选取子群 V/N使 $U/N \leqslant V/N \leqslant UC/N$并且 $|V/N : U/N| = p$.从而 V/N是 p^3阶群.又由 $UC = VC$得 $V \cap C > T$,$V \cap C/N$作为 C/N的子群是循环的,于是 V/N是方次数为 p^2的 p^3阶群.另一方面,$MU = G = MV$,$|M \cap V/N| = |V/U| = p$.因此 $V \cap M/N$是 V/N但不是 U/N的 p阶子群,从而 V/N的 p阶元至少有 p^2个.由引理 6知 $p = 2$并且 $V/N \cong D_8$. 现在 $(G/N)/(U/N) = (G/N)/C_{G/N}(U/N)$同构于 $\mathrm{Aut}(U/N)$的一个子群.而 $|\mathrm{Aut}(U/N)| = |GL(2,2)| = 6$,易见 $|G/N| = 24$, 又 U/N是 G/N的 4阶子群且 $U/N = C_{G/N}(U/N)$.由文献[5]p. 414引理 2知 $G/N \cong S_4$.

由定理 2的证明过程我们不难发现如下结论:

定理 3 群 G是超可解的如果对于 G的每个合数指数极大子群 M,$I(M)$有一个极大元 C使得 $C/K(C)$为奇阶循环,其阶大于或等于 $|G:M|$.

参考文献

1 Deskins W E. On maximal subgroups. Proc Symp Pure Math, 1959, (1): 100~104.

2 Li Shirong, Zhao Yaoqing. The deskins index complex and the solvability of finite groups. Southeast Asian Bull of Math, 1998, (22): 291~299.

3 Li Shirong. The deskins index complex and the supersolvability of finite groups. J Pure Appl Algebra, 1999, (144): 297~302.

4 徐明曜等.有限群导引.下册.北京:科学出版社,1999.

5 张远达.有限群构造.北京:科学出版社,1982.

6 陈重穆.内、外-Σ群与极小非-Σ群.重庆:西南师范大学出版社,1988.

(责任编辑:黎贞崇)

欢迎向《广西科学》投稿

《广西科学》是广西科学院、广西科学技术协会主办,广西科技厅、广西教育厅协办的自然科学综合性学术期刊。主要刊登自然科学各领域中高水平的学术论文和重要科研实验报告、具有创造性的科研成果、新理论和高新技术的应用基础理论、论辩性的争鸣文稿和重要著作的评论。读者对象是从事自然科学研究、开发的科技工作者,大专院校师生,教科文卫管理人员以及有关部门的专业技术干部和管理干部。

《广西科学》为季刊,国内外公开发行。

欢迎科技工作者和大专院校师生向本刊投稿。

地址:广西南宁市星湖路 32号《广西科学》编辑部; 邮编:530022;电话:(0771)5311061

E-mail: gxkx@public.nn.gx.cn http://gxkk.chinajournal.net.cn