DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.02.006
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (2): 101～103

CI-截与群的可解性*

On CI-sections and Solvability of Finite Groups

钟祥贵
Zhong Xianggui

(广西师范大学数学与计算机科学学院,桂林市育才路3号, 541004)
(College of Math. & Comp., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 利用 CI-截的性质,得到有限群为可解群的若干充分条件,并讨论有关文献提出的猜想.
关键词 CI-截 极大子群 可解群
中图法分类号 O152.1

Abstract Some sufficient conditions for a sovable finite group are gained by use of the CI-section and its properties. The conjecture in relevant reference is discussed.

Key words CI-section, maximal subgroup, sovable group

1959年, Deskins[1]引入群 G 的极大子群 M 的正规指数 $\eta(G:M)$ 的概念并证明: G 可解当且仅当对 G 的任一极大子群 M,都成立 $\eta(G:M)=|G:M|$. 正规指数近几年来获得了较为系统的研究. 李世荣、王燕鸣在文献[2]中定义了与正规指数密切相关的 CI-截概念(群 G 的极大子群 M 的 CI-截 $Sec(M)=M\cap N/K$,其中 N/K 是 G 的一个主因子 $K\leqslant M$ 而 $N\nsubseteq M$),由此获得一系列关于可解和 π-可解群的新刻画,并进而提出猜想:当每个 $Sec(M)$ 超可解时, G 是可解的. 本文讨论上述猜想,得到有限群为可解群或 π-可解群的若干充分条件.

本文考虑的群均为有限,未加说明的符号均是标准的. 另外,如果 G 是1个群, $\pi(G)$ 表示 G 之阶的素因子集; $M<\cdot G$ 表示 M 是 G 的极大子群, $[K]H$ 表示 G 的正规子群 K 与子群 H 的半直积; M_G 表示 $Core_G(M)$ 即 M 在 G 中的核.

1 定义及引理

定义 1[2] 设 G 是群,我们定义

(1) $F=\{M|M<\cdot G\}$;

(2) $F^p=\{M|M\in F, M$ 包含 G 的一个 Sylow p-子群的正规化子$\}$;

(3) $F^{sp}=\cup_{p\in\pi(G)}F^p$.

性质 1[2] 设 G 是群,则

(1) 若 $N\leqslant M\leqslant G, N\trianglelefteq G, M<\cdot G$,则 $Sec(M)\cong Sec(M/N)$;

(2) 若 G 是单群, $M<\cdot G$,则 $Sec(M)=M$.

引理 1[5] 若单群 G 与 $\sum_4$(4个文字上的对称群)无关,则 G 是下列群之一:

(i) $Sz(2^{2m+1}), m\geqslant 1$;

(ii) $PSL(2,2^n), n>1$;

(iii) $PSU(3,2^n), n>1$;

(iv) J_1 和 Ree 群;

(v) $PSL(2,p^n), p^n\equiv 3$ 或 $5(\mathrm{mod}\,8)$.

2 主要结果及证明

首先给出文献[2]中猜想在一定条件下的一个肯定回答.

定理 1 若对群 G 的每个极大子群 M, $Sec(M)$ 超可解,其 Sylow 2-子群为交换群,则 G 可解.

证明 设 G 为极小阶反例,而 N 是 G 的一个极小正规子群. 由性质1(1)知 G/N 满足假设,由归纳 G/N 可解. 若 G 有2个不同的极小正规子群 N_1 和 N_2,则 G/N_1 和 G/N_2 均可解,故 G 同构于 $G/N_1\times G/N_2$ 的1个子群从而 G 可解,矛盾. 从而可设 G 有唯一极小正规子群 N. 假若 N 不可解,则 N 为非交换特征单群,由 Thompson 奇阶群可解的定理, $2||N|$. 取 $S\in Syl_2(N)$,根据 Frattini 论断, $G=N_G(S)N$. 易知 $N_G(S)<G$,从而存在 G 的极大子群 M 满足 $M\geqslant$

2001-08-27收稿, 2001-11-19修回。
* 国家自然科学基金(10161001)、广西师范大学校管项目基金资助。

$N_G(S)$, $G = MN$. 而由 N 的唯一性可得 $M_G = 1$, 从而 $Sec(M) = M\cap N \geqslant N_N(S)$. 依假设, $M\cap N$ 超可解, $M\cap N$ 有 Sylow 塔, 从而 $M\cap N$ 为 2-幂零群. 因此, $N_N(S)$ 作为 $M\cap N$ 的子群也是 2-幂零的. 另外, 依题设 S 是交换群, 故 $C_N(Z(S)) = C_N(S) \leqslant N_N(S)$ 也是 2-幂零的, 据文献 [4] 定理 10.28, N 为 2-幂零, 这与 N 非可解矛盾.

现在由 G/N 和 N 的可解性得 G 可解, 与 G 是极小阶反例矛盾. 所以极小反例不存在. G 为可解群.

有例子表明: G 的极大子群 M 的 2 阶子群均正规, 但 G 不一定可解. 如 $G = SL(2,5)$, $G/Z \cong A_5$, G 只有唯一的一个 2 阶元. 显然 G 的每个极大子群 M 的 2 阶子群均正规, 但 $G = SL(2,5)$ 不可解. 然而我们却能证明下述结果.

定理 2 若 G 的每个极大子群 M, 其 $Sec(M)$ 的 Sylow 2-子群 S 的 2 阶子群均正规于 $N_{Sec(M)}(S)$, 则 G 可解.

证明　设 G 为极小阶反例. N 是 G 的任意极小正规子群. G/N 满足假设, 由归纳 G/N 可解. 从而 G 必有唯一极小正规子群 N. 假若 N 不可解, 则 N 为非交换特征单群, 从而 $2 \mid |N|$. 令 $S \in Syl_2(N)$. 根据 Frattini 论断, $G = N_G(S)N$. 显然 $N_G(S) < G$, 从而存在 G 的极大子群 $M \geqslant N_G(S)$, $G = MN$. 又因 $M_G = 1$. 从而 $Sec(M) = M\cap N \geqslant N_N(S) \geqslant S$. 易见 $S \in Syl_2(Sec(M))$, 依题设, S 的 2 阶子群均正规于 $N_{Sec(M)}(S)$. 而 $N_{Sec(M)}(S) \leqslant N_N(S) \leqslant Sec(M)$, 所以 $N_{Sec(M)}(S) = N_N(S)$. 故 N 的 Sylow 2-子群 S 的每个 2 阶子群均正规于 $N_N(S)$.

现在我们分下面几步来导出矛盾.

(1) N 不包含任何具有 2^n 阶的核的 Frobenius 群.

若否, N 有 1 个 Frobenius 群 $F = [K]H$, 其中 K 为 F 的 Frobenius 核, 且 $|K| = 2^n$. 那么 $Z(F) \leqslant Z(H)$ 和 $K \leqslant S$, 此处 $S \in Syl_2(N)$. 设 N_1 是含于 K 的 F 的 1 个极小正规子群, 则 $N_1 \leqslant K$, N_1 是初等阿贝尔的, 依假设 $N_1 \leqslant Z(S)$. 故 $S \leqslant C_N(N_1) \trianglelefteq N_N(N_1)$. 根据 Frattini 论断, 我们有 $N_N(N_1) = C_N(N_1)N_{K_1}(S)$, 其中 $K_1 = N_N(N_1)$. 现在, 按假设和上一段的证明, S 的每个 2 阶子群在 $N_{K_1}(S)$ 中正规, 从而 N_1 的每个 2 阶子群在 K_1 中正规, 故 $N_1 \leqslant Z(K_1)$. 因为 $F \leqslant K_1$, 从而 $N_1 \leqslant Z(F)$, $N_1 = 1$. 矛盾. 因此 (1) 成立.

(2) 按 (1), 我们看到 N 与 A_4 (4 个文字上的交换群), 从而与 $\sum_4$ (4 个文字上的对称群) 无关. 又 N 是特征单群, 可设 $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_s$, 其中 $N_1, N_2, \cdots, N_s$ 是彼此同构的非交换单群, $N_i\ (1 \leqslant i \leqslant s)$ 亦与 $\sum_4$ 无关. 依引理 1, N_i 可能为下列群之一: $Sz(2^{2m+1})$, $PSL(2,2^n)$, $PSU(3,2^n)$, J_1 和 Ree 群, $PSL(2,p^n)$, $p^n \equiv 3$ 或 $5 \pmod 8$.

但是, 另一方面, 由文献 [6], $Sz(q)$, 此处 $q = 2^{2m+1}$, 包含一个具 q^2 阶的 Frobenius 核, 从而 N_i 不是 $Sz(q)$. 类似地可证 N 不能是 $PSL(2,2^n)$. 因为 $PSL(2,p^n)$ (p 是奇素数) 含有 A_4 (文献 [7]), N 不同构于 $PSL(2,p^n)$. 另外, $PSU(3,2^n)$ 包含 $PSL(2,2^n)$ (文献 [6]); J_1 包含 $PSL(2,5)$ 和 Ree 群有子群 $PSL(2,3^{2n+1})$ (文献 [6]). 这些事实表明 N_i 也不能是 $PSU(3,2^n)$, J_1 和 Ree 群中的任何一个. 矛盾.

故 N 可解, G 亦可解. 与 G 是极小反例矛盾.

推论 1　设 G 是群. 若所有 $M \in F$, $Sec(M)$ 都是 PN-群, 则 G 可解.

推论 2　设 G 是群. 若对任意 $M \in F$, $Sec(M)$ 的 Sylow 2-子群皆循环, 则 G 可解.

证明　令 $P \in Syl_2(Sec(M))$. H 是 P 的 2 阶子群, 则 H char $P \trianglelefteq N_{Sec(M)}(P)$. 由定理 2 立得结论.

推论 3　设 G 是群. 若对任意 $M \in F$, $Sec(M)$ 的 Sylow 2-子群 P 至多有一个对合, 则 G 可解.

证明　由假设及文献 [3] 定理 6.1 可知, P 是循环群或广义四元素群. 从而 P 只有唯一 1 个 2 阶子群 H, 显然 $H \trianglelefteq N_{Sec(M)}(P)$. 由定理 2 立得结论成立.

利用 $Sec(M)$ 的性质, 我们也可以讨论群的 π 可解性.

定理 3　群 G 为 π 可解当且仅当对每个 $M \in F^{op}$, $Sec(M)$ 为 π' 群或 r-群, 其中 $r \in \pi$.

证明　充分性

令 G 是一个极小阶反例, N 是 G 的极小正规子群. 由性质 1(1) 易知 G/N 满足假设, G/N π 可解. 不失一般性, 我们可以假设 N 是 G 的唯一极小正规子群.

如果 N 是 π' 群, 那么 G/N 和 N 均 π-可解, 从而 G 为 π 可解, 与 G 是反例矛盾. 令 $\pi_1 = \{p \mid p \in \pi, p \mid |N|\}$, 那么 $\pi_1 \neq \emptyset$. 任取 $p \in \pi_1$, 设 $P \in Syl_p(N)$, 则 $1 < N_G(Z(J(P))) < G$, 故存在 $M \in F^{op}$:

$$M \geqslant N_G(Z(J(P))) \geqslant N_G(P) = N_G(P_1 \cap N) \geqslant N_G(P_1),$$

其中 $P_1 \in Syl_p(G)$. 应用 Frattini 论断, $G = N_G(P)N = MN$, 又由 N 的唯一性可得 $M_G = 1$, 依定义, $Sec(M) = M\cap N$.

由假设, $M\cap N$ 是 π' 群或 r-群. 若 $M\cap N$ 为 π' 群, 则 $1 = |G/M|_p = |N|_p$, 矛盾. 从而 $M\cap N$ 是 1 个 $r = p$ 群. 特别, $M\cap N$ 幂零, 从而其子群 $N_N(Z(J(P)))$ 幂零. 故当 p 为奇素数时, 由

Glauberman ZJ定理推知 N为 p幂零.矛盾.因此 $p=2$, $\pi_1=\{2\}$,当然 $2\notin\pi'$.

现在 2是 $|N|$ 的素因子中唯一属于 π的素因子.若 N为 2-群,N已 π可解,矛盾.若 N不是 2-群,则对 $|N|$ 的任意奇素因子 $q\in\pi'$,令 $Q=\mathrm{Syl}_q(N)$,则 $Q=N\cap Q_1$,$Q_1\in\mathrm{Syl}_q(G)$.由上一段的证明知,G有极大子群 H,$Sec(H)=H\cap N$.依假定,$H\cap N$为 π'群或 r-群.但 $q\,|\,|H\cap N|$,所以 $H\cap N$只能是 π'群.特别,$N_N(Z(J(Q)))$作为 $H\cap N$的子群是奇阶群,当然 2-闭.应用 Petter的定理[3]知,N亦 2-闭.由 N的极小性知 N为 2-群.矛盾.

必要性　因 G π可解,G的每个主因子必为 r-群或 π'群.$r\in\pi$.从而 $Sec(M)$作为主因子的子群亦为 r-群或 π'群.

致谢

感谢广西大学李世荣教授的指导和鼓励.

参考文献

1　Deskins W E. On maximal subgroups. Proc Symp Pure Math, 1959, 1: 100- 104.

2　Li Shirong, Wang Yanming. On C-section and C-index of finite groups. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 151: 309- 319.

3　徐明耀等.有限群导引.下册.北京: 科学出版社, 1999.

4　陈重穆.内外 Σ群与极小非 Σ群.重庆: 西南师范大学出版社, 1988.

5　Glauberman G. Factorization in local subgroups of finite groups. CBMS Monograph 33. American Mathematical Society, Providence R I, 1977.

6　Gorenstein D. Finite Simple Groups. New York. 1982.

7　Huppert B. Endliche Gruppen I. New York: Berlin-Heidelberg. 1967.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 100页 Continue from page 100)

证明　必要性　若 X强光滑,显然 X光滑.下证 X是 LNUS对于任意的 $x\in S$, $\{x_n^*\}\subset S^*$,若 $x_n^*(x)\to 1$,对此 x,存在 $x^*\in S^*$,使得 $x^*(x)=1$,故由 X是强光滑的定义知 $x_n^*\to x^*$,从而 $\{x_n^*\}$是相对列紧.结合引理 2即得 X是 LNUS.

充分性　设 $x\in S$, $\{x_n^*\}$, $\{y_n^*\}\subset S^*$,且有 $x_n^*(x)\to 1$, $y_n^*(x)\to 1$,因 X是局部接近一致光滑,故存在子列 $\{x_{n_k}^*\}\subset\{x_n^*\}$, $\{y_{n_k}^*\}\subset\{y_n^*\}$,使得 $x_{n_k}^*\to x_0^*\in B^*$, $y_{n_k}^*\to y_0^*\in B^*$,即有: $x_{n_k}^*(x)\to x_0^*(x)=1$; $y_{n_k}^*(x)\to y_0^*(x)=1$,又因为 X是光滑的,故有: $x_0^*=y_0^*$ (x点处的支撑泛函唯一).从而 $x_{n_k}^*-y_{n_k}^*\to 0$,且必有 $x_n^*-y_n^*\to 0$. (事实上,如若不然则存在 $\{x_{n_j}^*\}\subset\{x_n^*\}$; $\{y_{n_j}^*\}\subset\{y_n^*\}$,及 $\varepsilon_0>0$,使得 $\|x_{n_j}^*-y_{n_j}^*\|\geq\varepsilon_0$,因 $x_{n_j}^*(x)\to 1$, $y_{n_j}^*\to 1$,且 X是 LNUS,故存在 $\{x_{n_{kl}}^*\}\subset\{x_{n_j}^*\}$, $\{y_{n_{kl}}^*\}\subset\{y_{n_j}^*\}$,使得 $x_{n_{jl}}^*-y_{n_{jl}}^*\to 0$,这就与 $\|x_{n_j}^*-y_{n_j}^*\|\geq\varepsilon_0$,矛盾.) 从而 X是强光滑的.

推论 3　Banach空间 X是很光滑的当且仅当 X是接近很光滑 (NVS)且光滑.

推论 4　若 Banach空间 X具有 H^* 性质,则 X光滑当且仅当 X强光滑.

推论 5　若 Banach空间 X自反,则 X强光滑当且仅当 X具有 H^* 性质且光滑.

证明　若 Banach空间 X自反,则 X是 LNUS的当且仅当 X具有 H^* 性质 (见文献 [5]).结合定理 4即可得证.

参考文献

1　Huff R. Banach spaces which are nearly uniformly convex. Rocky Mount. J Math, 1980, 10: 743- 749.

2　Gobel K, Sekowski T. The modulus of noncompact convexity. Annls Univ Curie-Sklodowska, 1984, A38: 41- 48.

3　Sekowski T, Stachura A. Noncompact smoothness and noncompact covexity. Ato Sem Mat Fis Univ Modena, 1998, (36): 329- 338.

4　刘世伟.某些 Banach空间的很极光滑性与一致极光滑性.华中师范大学学报, 1986, 4: 413- 418.

5　Jozef Banas. On drop property and nearly uniformly smooth Banach spaces. Nonliner Analysis, 1990, 14(11): 927- 933.

6　Diestel J. Geometry of Banach space-selected topics. Lecture notes in Math, Springer Verlag, 1975. 485.

7　曹温淳. Banach空间的接近光滑性,接近凸性和滴性及其应用.数学杂志, 1995, 15(2): 187- 191.

8　魏文展,李日光,元昌安.复拟 Banach空间的 PL一致光滑性及其鞅刻划.数学杂志, 1998, 18(3): 321- 332.

9　俞鑫泰. Banach空间几何理论.上海: 华东师范大学出版社, 1986.

(责任编辑: 黎贞崇)