DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.02.005

广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (2): 99~ 100, 103

Banach空间若干光滑性及其相互关系*

Some Smooth Properties of Banach Spaces and Their Relations

魏文展　　徐厚宝

Wei Wenzhan　Xu Houbao

(广西师范学院数学系　南宁市明秀东路　530001)

(Dept. of Math., Guangxi Teachers College, East Mingxiulu, Nanning, Guangxi, 530001, China)

摘要　证明 Banach 空间 X一致极光滑的充分必要条件为 X强光滑且自反,因而有关文献中引入的一致极光滑是介于一致光滑与强光滑之间的一种光滑性.给出有关文献中相关概念与接近光滑性等概念之间的联系.

关键词　Banach空间　一致极光滑　很极光滑　强光滑　很光滑　接近光滑　H^* 性质

中图法分类号　O 177.2

Abstract　It is proved that Banach space X is uniformly extremely smooth if and only if X is strong smooth and reflective. The uniformly extremely smooth property, which is introduced in relevant reference, is one of smooth properties between uniformly smooth property and strong smooth property. Some local nearly uniformly smooth properties and results related with extremely smooth property and other properties are put forward.

Key words　Banach space, uniformly extremely smooth, very extremely smooth, strong smooth, very smooth, nearly smooth, H^* property

在 Banach空间几何理论中,一致光滑性和光滑性及其相关性质起着重要作用,且经常被应用到泛函分析的各个分支、算子理论及随机控制理论中.与之相关的概念也在许多泛函分析的书中被广泛的讨论.近几年来,接近光滑性的研究又有了进一步的发展. Huff在文献 [1]中、Goebel& Sekowski在文献 [2]中做了使接近凸性一般化的工作.在此基础上, Sekowski& Stachura在文献 [3]中提出了接近一致光滑的概念以及相关概念.本文发现接近一致光滑性及相关性质与文献 [4]中介绍的光滑性有着内在的联系,并在一定条件下等价.同时对各种光滑性之间的关系做了进一步讨论.

本文中设 X是 Banach空间, X^* 是 X的共轭空间, X^{**} 是 X的二次共轭空间. $S=\{x\in X; \|x\|=1\}$, $B=\{x\in X; \|x\|\leqslant 1\}$.

2001-09-04收稿, 2002-03-04修回。

* 广西自然科学基金资助项目 (9711006).

1　基本定义

定义 1[4]　在 Banach空间 X中,设 $\{x_k^*\}$, $\{y_k^*\}\subset S^*$,如果对于某个 $x^{**}\in S^{**}$,当 $x^{**}(x_k^*)\to 1$, $x^{**}(y_k^*)\to 1$, $x^{**}(y_k^*)\to 1$时,若有 $x_k^*-y_k^*\to 0$,则称 X为一致极光滑的;若有 $x_k^*-y_k^*\xrightarrow{w} 0$,则称 X为很极光滑的;若有 $x_k^*-y_k^*\xrightarrow{w^*} 0$,则称 X为极光滑的.

定义 2[4]　在 Banach空间 X中,设 $\{x_k^*\}$, $\{y_k^*\}\subset S^*$,如果对于某个 $x\in S$, $x_k^*(x)\to 1$, $y_k^*\to 1$时,若有 $x_k^*-y_k^*\to 0$,则称 X为强光滑的;若有 $x_k^*-y_k^*\xrightarrow{w} 0$,则称 X为很光滑的;若有 $x_k^*-y_k^*\xrightarrow{w^*} 0$,则称 X为光滑的.

定义 3[5]　X称为局部接近一致光滑 (LNUS):如果对于任意的 $x\in S$下式成立: $\lim\limits_{X\to 0}T(f^*(x,X))=0$(其中, $f^*(x,X)=\{f\in B^*; f(x)\geqslant 1-X\}$, T表示非紧性测度.)

定义 4[5] X称为接近很光滑性（NVS）：如果对于任意的 $x\in S,\{x_k^*\}\subset S^*$，若 $x_k^*(x)\to 1$，则序列 $\{x_k^*\}$ 相对弱列紧．

定义 5[5] X称为具有 H^* 性质：如果对于 X^* 中任意 w^* 收敛序列 $\{x_k^*\}$，若 $x_k^*\xrightarrow{w^*}x_0^*$，且 $\|x_k^*\|\to\|x_0^*\|$，则有 $x_k^*\to x_0^*$．

注：本文采取的符号意义与文献 [4]同，f_x 表示点 x 处的支撑映射．

2 一致极光滑性的一个充分必要条件

引理 1 若 X很极光滑，则 X是很光滑．

证明 由定义 1和定义 2，我们可以直接得到证明，在此略．

定理 1 X^* 很极光滑当且仅当 X^* 很光滑．

证明 首先说明若 X^* 很光滑，则 X^* 自反且光滑（事实上：对于任意的 $x^*\in S^*$，则存在 $x^{**}\in S^{**}$，使得 $x^{**}(x^*)=1$，取 $y_k^{**}=x^{**}$（对任意的 k），则 $y_k^{**}(x^*)\to 1$，另外，对此 x^{**}，由 Goldstine-Weston 稠密性定理知，存在 $\{x_n\}\subset S$，使得 $\hat{x}_n\xrightarrow{w^*}x^{**}$，故对上述的 x^*，有 $\hat{x}_n(x^*)\to x^{**}(x^*)=1$，因 X^* 很光滑，故 $\hat{x}_n\xrightarrow{w}x^{**}$，再由 Mazur定理：$J_X(X)$ 在 X^{**} 中是 w 闭的．从而存在 $x\in S$，使得，$\hat{x}=x^{**}$，即 $x^*(x)=1$，由 James定理知，X自反，则有 X^* 自反．X^* 光滑是显然的）．故 X^{***} 光滑，从而 X^* 很极光滑[4]，结合引理 1，即知定理 1成立．

推论 1 X^* 很极光滑，则 X自反．

定理 2 若 X^* 弱序列完备，且 X很极光滑，则 X自反．

证明 事实上易知只需证明 X^* 自反．

设 $x^{**}\in S(X^{**})$，$\{x_n\}\subset S^*$，使得，$x^{**}(x_n^*)\to\|x^{**}\|=1$，则 $\{x_n^*\}$ 是 X^* 中的弱 Cauchy列，若不然，则有 $x_0^{**}\in S^{**}$，及 $\varepsilon_0>0$，使得无论对于多大的 n，都可以找到 $p_n>n$，$|x_0^{**}(x_n^*)-x_0^{**}(x_{p_n}^*)|>\varepsilon_0$，特别的，令 $n=1,2,3,\cdots$，则我们得到 $\{x_n^*\}$ 的子序列 $\{x_{p_n}^*\}$，显然 $x^{**}(x_{p_n}^*)\to 1$，依很极光滑的定义，有 $x_n^*-x_{p_n}^*\xrightarrow{w}0$，这就与 $x_{p_n}^*$ 的选择相悖了．因 X^* 弱序列完备，故有 $x_0^*\in X^*$，$(\|x_0^*\|\leqslant 1)$，使得 $x_n^*\xrightarrow{w}x_0^*$，进而 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{**}(x_n^*)=x^{**}(x_0^*)=0$，由 James定理知 X^* 自反，故 X自反．

推论 2 X光滑且自反，当且仅当 X很极光滑且 X^* 弱序列完备．

定理 3 X一致极光滑，当且仅当 X强光滑且自反．

证明 必要性 先证 X^* 自反（进而 X自反）．

设 $x^{**}\in S(X^{**})$，$\{x_n\}\subset S^*$，使得，$x^{**}(x_n^*)\to\|x^{**}\|=1$，仿定理 2的证明知：$\{x_n^*\}$ 是 X^* 中的 Cauchy列，设 $x_n^*\to x_0^*$，显然 $x^{**}(x_0^*)=1$，故 X^* 自反．注意 X强光滑的充要条件为：对每个 $x\in S$ 关于 $y\in S$ 一致地有 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\|x+ty\|-1-tf_x(y)}{t}=0$．若 X不是强光滑的，则有 $x_0\in S$，$\{y_n\}\subset S$，$t_n\to 0^+$ 使得：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|x+t_ny_n\|-1-t_nf_x(y_n)}{t_n}=c\neq 0$．由文献 [6]中的（1）式，$\dfrac{f_{x+t_ny_n}(y_n)}{\|x+t_ny_n\|}\geqslant\dfrac{\|x+t_ny_n\|-1}{t_n}\geqslant f_x(y_n)$，故 $c>0$．另一方面：

$$\frac{f_{x+t_ny_n}(x)}{\|x+t_ny_n\|}=\frac{f_{x+t_ny_n}(x+t_ny_n)-t_nf_{x+t_ny_n}(y_n)}{\|x+t_ny_n\|}=\frac{\|x+t_ny_n\|^2-t_nf_{x+t_ny_n}(y_n)}{\|x+t_ny_n\|}\to 1=f_x(x)$$

将 x 视为 x^{**}，依一致光滑性的定义，有：

$$f_n\to f_x,\ (f_n(x)=\frac{f_{x+t_ny_n}(x)}{\|x+t_ny_n\|})$$

即：$c=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\|x+t_ny_n\|-1-t_nf_x(y_n)}{t_n}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}(f_n(y_n)-f_x(y_n))\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|f_n-f_x\|=0$ 矛盾．说明 X强光滑．

充分性 注意 X自反及文献 [4]，我们只需证对于每个 $x\in S$ 关于 $y\in S$ 一致地有

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|-2}{t}=0 \tag{1}$$

因

$$\begin{aligned}0&\leqslant\varliminf_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|-2}{t}\leqslant\varlimsup_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|-2}{t}\leqslant\\&\varlimsup_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|-1-tf_x(y)}{t}+\varlimsup_{t\to 0^+}\frac{\|x-ty\|-1+tf_x(y)}{t}=\\&\varlimsup_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|-1-tf_x(y)}{t}+\varlimsup_{t\to 0^+}\frac{\|x+tz\|-1-tf_x(z)}{t}=0.\end{aligned}$$

最后一步是因 X强光滑（Frechet可微）．证毕．

3 与接近光滑性的关系

引理 2[7] Banach空间 X是局部接近一致光滑当且仅当 $x\in S,\{x_n^*\}\subset S^*$，且 $x_n^*(x)\to 1$ 时蕴含 $\{x_n^*\}$ 相对列紧．

定理 4 Banach空间 X是强光滑当且仅当 X是局部接近一致光滑（LNUS）且光滑．

（下转第 103页 Continue on page 103）

Glauberman ZJ定理推知 N 为 p幂零.矛盾.因此 $p=2$, $\zeta_1=\{2\}$,当然 $2\notin\zeta'$.

现在 2是 $|N|$ 的素因子中唯一属于 ζ的素因子.若 N 为 2-群, N 已 ζ可解,矛盾.若 N不是 2-群,则对 $|N|$ 的任意奇素因子 $q\in\zeta'$,令 $Q=Syl_q(N)$,则 $Q=N\cap Q_1$, $Q_1\in Syl_q(G)$.由上一段的证明知, G有极大子群 H, $Sec(H)=H\cap N$.依假定, $H\cap N$为 ζ'群或 r-群.但 $q||H\cap N|$,所以 $H\cap N$只能是 ζ'群.特别, $N_N(Z(J(Q)))$作为 $H\cap N$ 的子群是奇阶群,当然 2-闭.应用 Petter的定理[3]知, N亦 2-闭.由 N的极小性知 N 为 2-群.矛盾.

必要性 因 G ζ可解, G的每个主因子必为 r-群或 ζ'群. $r\in\zeta$.从而 $Sec(M)$ 作为主因子的子群亦为 r-群或 ζ'群.

致谢

感谢广西大学李世荣教授的指导和鼓励.

参考文献

1 Deskins W E. On maximal subgroups. Proc Symp Pure Math, 1959, 1: 100~104.

2 Li Shirong, Wang Yanming. On C-section and C-index of finite groups. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 151: 309~319.

3 徐明耀等.有限群导引.下册.北京:科学出版社,1999.

4 陈重穆.内外-Σ群与极小非-Σ群.重庆:西南师范大学出版社,1988.

5 Glauberman G. Factorization in local subgroups of finite groups. CBMS Monograph 33. American Mathematical Society, Providence R I, 1977.

6 Gorenstein D. Finite Simple Groups. New York. 1982.

7 Huppert B. Endliche Gruppen I. New York: Berlin-Heidelberg. 1967.

(责任编辑:黎贞崇)

(上接第 100页 Continue from page 100)

证明 *必要性* 若 X强光滑,显然 X光滑.下证 X是 LNUS对于任意的 $x\in S$, $\{x_n^*\}\subset S^*$,若 $x_n^*(x)\to 1$,对此 x,存在 $x^*\in S^*$,使得 $x^*(x)=1$,故由 X是强光滑的定义知 $x_n^*\to x^*$,从而 $\{x_n^*\}$是相对列紧.结合引理 2即得 X是 LNUS.

充分性 设 $x\in S$, $\{x_n^*\}$, $\{y_n^*\}\subset S^*$,且有 $x_n^*(x)\to 1$, $y_n^*(x)\to 1$,因 X是局部接近一致光滑,故存在子列 $\{x_{n_k}^*\}\subset\{x_n^*\}$, $\{y_{n_k}^*\}\subset\{y_n^*\}$,使得 $x_{n_k}^*\to x_0^*\in B^*$, $y_{n_k}^*\to y_0^*\in B^*$,即有: $x_{n_k}^*(x)\to x_0^*(x)=1$; $y_{n_k}^*(x)\to y_0^*(x)=1$,又因为 X是光滑的,故有: $x_0^*=y_0^*$ (x点处的支撑泛函唯一).从而 $x_{n_k}^*-y_{n_k}^*\to 0$,且必有 $x_n^*-y_n^*\to 0$.(事实上,如若不然则存在 $\{x_{n_j}^*\}\subset\{x_n^*\}$; $\{y_{n_j}^*\}\subset\{y_n^*\}$,及 $\varepsilon_0>0$,使得 $\|x_{n_j}^*-y_{n_j}^*\|\geqslant\varepsilon_0$,因 $x_{n_j}^*(x)\to 1$, $y_{n_j}^*\to 1$,且 X是 LNUS,故存在 $\{x_{n_{jl}}^*\}\subset\{x_{n_j}^*\}$, $\{y_{n_{jl}}^*\}\subset\{y_{n_j}^*\}$,使得 $x_{n_{jl}}^*-y_{n_{jl}}^*\to 0$,这就与 $\|x_{n_j}^*-y_{n_j}^*\|\geqslant\varepsilon_0$,矛盾.)从而 X是强光滑的.

推论 3 Banach空间 X是很光滑的当且仅当 X是接近很光滑 (NVS)且光滑.

推论 4 若 Banach空间 X具有 H^* 性质,则 X光滑当且仅当 X强光滑.

推论 5 若 Banach空间 X自反,则 X强光滑当且仅当 X具有 H^* 性质且光滑.

证明 若 Banach空间 X自反,则 X是 LNUS的当且仅当 X具有 H^* 性质(见文献[5]).结合定理 4即可得证.

参考文献

1 Huff R. Banach spaces which are nearly uniformly convex. Rocky Mount. J Math, 1980, 10: 743~749.

2 Gobel K, Sekowski T. The modulus of noncompact convexity. Annls Univ Curie-Sklodowska, 1984, A38: 41~48.

3 Sekowski T, Stachura A. Noncompact smoothness and noncompact covexity. Ato Sem Mat Fis Univ Modena, 1998, (36): 329~338.

4 刘世伟.某些 Banach空间的很极光滑性与一致极光滑性.华中师范大学学报,1986,4: 413~418.

5 Jozef Banas. On drop property and nearly uniformly smooth Banach spaces. Nonliner Analysis, 1990, 14(11): 927~933.

6 Diestel J. Geometry of Banach space-selected topics. Lecture notes in Math, Springer Verlag, 1975. 485.

7 曹温淳. Banach空间的接近光滑性,接近凸性和滴性及其应用.数学杂志, 1995, 15(2): 187~191.

8 魏文展,李日光,元昌安.复拟 Banach空间的 PL一致光滑性及其鞅刻划.数学杂志, 1998, 18(3): 321~332.

9 俞鑫泰. Banach空间几何理论.上海:华东师范大学出版社, 1986.

(责任编辑:黎贞崇)