DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.01.009
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (1): 23~ 26

时滞三维顺环捕食系统的周期解和概周期解

Periodic and Almost Periodic Solutions of a Three-dimensional Prey-predator Cyclic Model with Multi Time-delays

李锋杰　　罗桂烈　　刘丙辰
Li Fengjie　Luo Guilie　Liu Bingchen
(广西师范大学数学与计算机科学学院，桂林市育才路 3号， 541004)
(Math.& Comp. Sci. College, Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　讨论一类含多个时滞且具“基于比率” Holling II 功能性反应的三维顺环捕食被捕食系统．证明了系统的一致持久性；当系统是周期系统，通过构造 Liapunov 泛函，得到了系统存在唯一的全局吸引的正周期解的充分条件；当系统是概周期系统时，通过 Razumikhin函数法，证明了系统存在唯一且一致渐近稳定的正概周期解．
关键词　三维顺环捕食系统　时滞　Holling II 功能性反应　周期解　概周期解
中图法分类号　O175

Abstract　A three-dimensional prey-predator cyclic system with ratio-dependent Holling II functional response and time-delays is discussed. By the Liapunov function method and Razumikhin function method, we proved the uniformly persistence of the system, the existence of a unique positive periodic solution which is globally attractive and a unique positive almost periodic solution which is uniformly asymptotically stable.
Key words　three-dimensional pre-predator cyclic model, time-delays, Holling II functional response, periodic solusion, almost periodic solution

种群的持续生存问题一直是生物数学和相关学科非常关心的问题．由于考虑到季节的影响，有必要考虑种群在周期和概周期变化环境下的发展趋势．文献 [1] 研究了两捕食者，一食饵，且两捕食者均具有 HollingII 类功能性反应的周期捕食链系统，得到该系统存在唯一全局渐近稳定的正周期解的充分条件．但是考虑多个时滞、“基于比率” HollingII 功能性反应和含密度制约的三维顺环捕食模型的文章还没有发现．本文拟讨论的模型相应于文献 [2] 中的第 I个模型，其它 2个模型可以类似地讨论．系统为 (1)．

为方便，记

$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), f_x = (f_{1x}, f_{2x}, f_{3x}), N_1 = \{1, 2, 3\}, N_2 = \{1, 2, \cdots, 6\}$.

其中，$x_i(t)$ 表示捕食者种群 X_i 在时刻 t的密度 ($i \in N_1$)．τ_i是与种群 X_i妊娠时间有关的正常数 ($i \in N_1$)，设 $\tau = \max\{\tau_i, i \in N_1\}$; $r_i(t), a_i(t), k_i(t), d_i(t), c_i(t)$, $i \in N_1$都是严格正的连续有界函数．设 $k_i(t), i \in N_1$是转化系数；设 $r_i(t)$ 分别是种群 X_i ($i \in N_1$) 在时刻 t的内禀增长率；$a_i(t)$ 是种群 X_i 的密度制约系数；X_2是 X_1的捕食者，X_3捕食 X_2，而 X_1又捕食 X_3，从而形成了一个三维的顺环捕食系统．

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1(t) = x_1(t)[r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - d_1(t)x_2(t)/(c_1(t)x_2(t) + x_1(t)) + (k_3(t)d_3(t-\tau_1)\cdot x_3(t-\tau_1))/((c_3(t-\tau_1)x_1(t-\tau_1) + x_3(t-\tau_1))] \overset{\triangle}{=} f_{1x}, \\
\dot{x}_2(t) = x_2(t)[r_2(t) - a_2(t)x_2(t) - d_2(t)x_3(t)/(c_2(t)x_3(t) + x_2(t)) + (k_1(t)d_1(t-\tau_2)\cdot x_1(t-\tau_2))/((c_1(t-\tau_2)x_2(t-\tau_2) + x_1(t-\tau_2))] \overset{\triangle}{=} f_{2x}, \\
\dot{x}_3(t) = x_3(t)[r_3(t) - a_3(t)x_3(t) - d_3(t)x_1(t)/(c_3(t)x_1(t) + x_3(t)) + (k_2(t)d_2(t-\tau_3)\cdot x_2(t-\tau_3))/((c_2(t-\tau_3)x_3(t-\tau_3) + x_2(t-\tau_3))] \overset{\triangle}{=} f_{3x}.
\end{cases}
\tag{1}
$$

引入下列记号，并假设它们在本文中恒成立．设 $k(t)$ 是一个严格正的连续有界函数，定义 $\bar{k} = \sup_{t \in R}\{k(t)\}, \underline{k} = \inf_{t \in R}\{k(t)\}$．从而，给出条件

$0 < \min\{\underline{d_i}, \underline{r_i}, \underline{a_i}, \underline{c_i}, \underline{k_i}, (i \in N_1)\} \leqslant \max\{\overline{d_i}, \overline{r_i}, \overline{a_i}, \overline{c_i}, \overline{k_i}, (i \in N_1)\} < +\infty$.

给出如下定义，$x \in R_+^3 \overset{\triangle}{=} \{x \in R^3 | x_i \geqslant 0, i = 1,$

2001-10-08收稿

2, 3},如果 $x\in \mathrm{Int}R_+^3$,则表示 $x>0$. 出于生物意义的考虑,仅考虑系统(1)在 $\mathrm{Int}R_+^3$ 中的性质.

设 $C^+\triangleq C([-\tau,0],R_+^3)$ 是一个由非负连续函数构成的 Banach 空间,且定义范数为 $\|\varphi\|=\sup_{\theta\in[-\tau,0]}|\varphi(\theta)|$, $(\varphi\in C^+, |\varphi(\theta)|=\sum_{i=1}^{3}|\varphi_i(\theta)|)$. 定义系统(1)的初始条件为

$$x(t)=\varphi\in C^+,\ t\in[-\tau,0],\ \varphi(0)>0. \qquad (2)$$

容易证明 f_x 对 x 满足局部 Lipschitz条件,从而系统(1)存在唯一满足初始条件(2)的解,并且此解在 $t\in[-\tau,+\infty)$(解的最大存在区间)上有定义. 若对任意的 $t>0$,都有 $x(t)>0$成立. 则我们把这样的解定义为系统(1)的正解.

下面的第1部分,在一定条件下证明了系统(1)一致持久性;第2部分,给出了系统(1)存在唯一且全局吸引的周期解的充分条件;第3部分,得到了系统(1)存在唯一且一致渐近稳定的概周期解的充分条件.

1 一致持久性

引理 1 假设系统(1)满足初始条件(2),则 $\mathrm{Int}R_+^3$ 为系统(1)的正向不变集.

证明 参照文献[3]中引理1的证明,可得 $\mathrm{Int}R_+^3$ 是系统(1)的正向不变集.

定理 1 假设系统(1)满足初始条件(2),如果系统(1)满足如下条件

$$\underline{r_i}\cdot\underline{c_i}>\overline{d_i},\ i\in N_1, \qquad (3)$$

那么,系统(1)是一致持久的,即存在集合 S且为系统(1)的最终有界集. S定义为

$$S\triangleq\{x\in \mathrm{Int}R_+^3\mid 0<m_i\leqslant x_i\leqslant M_i<+\infty,\ i\in N_1\}.$$

其中,$M_1\triangleq\dfrac{\overline{r_1}+\overline{k_3}\cdot\overline{d_3}}{\underline{a_1}}+\varepsilon$, $M_2\triangleq\dfrac{\overline{r_2}+\overline{k_1}\cdot\overline{d_1}}{\underline{a_2}}+\varepsilon$, $M_3\triangleq\dfrac{\overline{r_3}+\overline{k_2}\cdot\overline{d_2}}{\underline{a_3}}+\varepsilon$, $m_i\triangleq\dfrac{\underline{r_i}\cdot\underline{c_i}-\overline{d_i}}{2\overline{a_i}\,\underline{c_i}}$. $\varepsilon>0$且充分小($i\in N_1$).

证明 根据引理1, $\mathrm{Int}R_+^3$ 是系统(1)的正向不变集. 根据系统(1)的第一式和条件(3),可以得到

$$\dot{x}_1(t)\geqslant\left(\underline{r_1}-\frac{\overline{d_1}}{\underline{c_1}}\right)x_1(t)-\overline{a_1}x_1^2(t),$$

所以,$x_1(t)\leqslant m_1\Rightarrow\dot{x}_1(t)\geqslant(\underline{r_1}-\overline{d_1}/\underline{c_1})x_1(0)-\overline{a_1}x_1^2(0)>0$,因此,存在一个 $T_1>0$,当 $t\geqslant T_1+\tau$时,$x_1(t)\geqslant m_1$. 同理可证,当时 $t\geqslant T_i+\tau$时,$x_i(t)\geqslant m_i$, $i=2,3$.

由系统(1)的第1式,得

$$\dot{x}_1(t)\leqslant x_1(t)(\overline{r_1}-\underline{a_1}x_1(t)+\overline{k_3}\,\overline{d_3}).$$

参照上面讨论,可以得到,存在充分大的 $T'_1>0$,当 $t\geqslant T'_1+\tau$时,则 $x_1\leqslant M_1$. 同理可证,当 $t\geqslant T'_i+\tau$时,有 $x_i\leqslant M_i$, $i=2,3$成立. 那么对 $t>T+\tau=\max_{i\in N_1}\{T_i,T'_i\}+\tau$,一定有 $0<m_i\leqslant x_i(t)\leqslant M_i<+\infty$, $i\in N_1$成立.

因此集合 S是系统(1)的最终有界集. 即系统(1)是一致持久的.

注 根据以上讨论,可以选 $T+\tau=0$,将集合 S作为系统(1)的初始空间. 从而在讨论系统(1)在 $\mathrm{Int}R_+^3$ 中的性质时,可以改为讨论系统(1)在集合 S中的性质.

2 周期解

根据文献[4]中的定理2,容易得到如下定理.

定理 2 假设系统(1)是关于 t的周期系统(设周期为 ω),当系统(1)满足条件(2)和(3)时,系统(1)存在正的周期解,周期为 ω.

引理 2[5] 设 $f(t)$为区间 $[0,+\infty)$上非负可积且一致连续,则 $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.

定理 3 假设(1)满足初始条件(2)和(3),若(1)还满足下列条件

$$-\underline{a_1}+\frac{\overline{d_1}M_2}{(\underline{c_1}m_2+m_1)^2}+\frac{\overline{d_3}M_3}{(\underline{c_3}m_1+m_3)^2}+B_3+B_5<0, \qquad (4)$$

$$-\underline{a_2}+\frac{\overline{d_1}M_1}{(\underline{c_1}m_2+m_1)^2}+\frac{\overline{d_3}M_3}{(\underline{c_2}m_3+m_2)^2}+B_2+B_4<0, \qquad (5)$$

$$-\underline{a_3}+\frac{\overline{d_2}M_2}{(\underline{c_2}m_3+m_2)^2}+\frac{\overline{d_3}M_1}{(\underline{c_3}m_1+m_3)^2}+B_1+B_6<0, \qquad (6)$$

其中,$M_i, m_i, (i\in N_1)$ 定义在定理1中,

$$B_1\triangleq\frac{\overline{k_2}\cdot\overline{d_2}\,\overline{c_2}M_2}{(\underline{c_2}m_3+m_2)^2},\ B_2\triangleq\frac{\overline{k_2}\cdot\overline{d_2}\,\overline{c_2}M_3}{(\underline{c_2}m_3+m_2)^2},$$

$$B_3\triangleq\frac{\overline{k_1}\cdot\overline{d_1}\,\overline{c_1}M_2}{(\underline{c_1}m_2+m_1)^2},\ B_4\triangleq\frac{\overline{k_1}\cdot\overline{d_1}\,\overline{c_1}M_1}{(\underline{c_1}m_2+m_1)^2},$$

$$B_5\triangleq\frac{\overline{k_3}\cdot\overline{d_3}\,\overline{c_3}M_3}{(\underline{c_3}m_1+m_3)^2},\ B_6\triangleq\frac{\overline{k_3}\cdot\overline{d_3}\,\overline{c_3}M_1}{(\underline{c_3}m_1+m_3)^2}.$$

则系统(1)的位于 $\mathrm{Int}R_+^3$ 中的任何正解对于其它正解而言是全局吸引的.

证明 假设 $x(t)$和 $y(t)$是系统(1)满足初始条件 $x(0), y(0)\in S$的任何2个正解,即 $x(t), y(t)\in S\subset \mathrm{Int}R_+^3$, $(t\geqslant 0)$.

构造 Liapunov 泛函如下

$$V(t)\triangleq V(t,x(t),y(t))=\sum_{i=1}^{3}|\ln x_i(t)-\ln y_i(t)|+B_3\int_{t-\tau_2}^{t}|x_1(s)-y_1(s)|\,\mathrm{d}s+B_5\int_{t-\tau_1}^{t}|x_1(s)-y_1(s)|\,\mathrm{d}s$$

$$+B_2\int_{t-f_3}^{t}|x_2(s)-y_2(s)|\,ds+B_4\int_{t-f_2}^{t}|x_2(s)-y_2(s)|\,ds+B_1\int_{t-f_3}^{t}|x_3(s)-y_3(s)|\,ds+B_6\int_{t-f_1}^{t}|x_3(s)-y_3(s)|\,ds,$$

易知,$V(t)\geqslant 0,(t\geqslant 0)$. 由条件(4)~(6),计算函数 $V(t)$ 沿着系统(1)的正解的右上 Dini 导数如下

$$\dot V(t)|_{(1)}\leqslant\left[-\underline{a}_1+\frac{\bar d_1M_2}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\frac{\bar d_3M_3}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2}+B_3+B_5\right]|x_1(t)-y_1(t)|+\left[-\underline{a}_2+\frac{\bar d_1M_1}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\frac{\bar d_2M_3}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2}+B_2+B_4\right]|x_2(t)-y_2(t)|+\left[-\underline{a}_3+\frac{\bar d_2M_2}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2}+\frac{\bar d_3M_1}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2}+B_1+B_6\right]|x_3(t)-y_3(t)|\leqslant -T\sum_{i=1}^{3}|x_i(t)-y_i(t)|.$$

其中,

$$-T\triangleq\max\left\{\begin{array}{l}-\underline{a}_1+\dfrac{\bar d_1M_2}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\dfrac{\bar d_3M_3}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2}+B_3+B_5,\\ -\underline{a}_2+\dfrac{\bar d_1M_1}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\dfrac{\bar d_2M_3}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2}+B_2+B_4,\\ -\underline{a}_3+\dfrac{\bar d_2M_2}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2}+\dfrac{\bar d_3M_1}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2}+B_1+B_6.\end{array}\right\}<0.$$

由微分不等式原理,有

$$V(t)+T\int_{T}^{t}\sum_{i=1}^{3}|x_i(s)-y_i(s)|\,ds\leqslant V(T),(t\geqslant T+f),$$

从而可得 $\int_{T}^{t}\sum_{i=1}^{3}|x_i(s)-y_i(s)|\,ds\leqslant\frac{V(T)}{T},(t\geqslant T+f)$. 因为 $x(t)$ 有界,且由系统(1),当 $t\in R^+$ 时,可得 $[\dot x_i(t)-\dot y_i(t)],(i\in N_1)$ 有界. 则当 $t\in R^+$ 时,$\sum_{i=1}^{3}|x_i(t)-y_i(t)|$ 一致连续,根据引理 2,当 $t\to+\infty$ 时,$\sum_{i=1}^{3}|x_i(t)-y_i(t)|\to 0$. 定理 3证毕.

现在,假设系统(1)为周期系统,由定理 3,立即可以得到下列结论.

定理 4 假设 k-周期系统(1)满足定理 2的条件和记号并且满足条件(4)~(6),则系统(1)存在唯一满足初始条件(2)的正周期解(周期为 k),且此解对于系统(1)满足其它初始条件的解是全局吸引的.

证明 由定理 2知,(1)存在周期解,假设 $x(t)$, $y(t)$ 为系统(1)任意 2个正周期解(周期可以不同). 则 $x(t)-y(t)$ 是一个概周期函数. 根据定理 3和概周期函数的性质,则可得 $x(t)\equiv y(t),(t\in R^+)$. 即系统(1)的正周期解是存在唯一的. 解的全局吸引性由定理 3得到.

3 概周期解

设系统(1)的乘积方程组为

$$\left\{\begin{aligned}\dot y_1(t)=\;&y_1(t)[r_1(t)-a_1(t)y_1(t)-d_1(t)y_2(t)/(c_1(t)y_2(t)+y_1(t))+(k_3(t)d_3(t-f_1)\cdot y_3(t-f_1))/(c_3(t-f_1)y_1(t-f_1)+y_3(t-f_1))]\triangleq f_{1y},\\ \dot y_2(t)=\;&y_2(t)[r_2(t)-a_2(t)y_2(t)-d_2(t)y_3(t)/(c_2(t)y_3(t)+y_2(t))+(k_1(t)d_1(t-f_2)\cdot y_1(t-f_2))/(c_1(t-f_2)y_2(t-f_2)+y_1(t-f_2))]\triangleq f_{2y},\\ \dot y_3(t)=\;&y_3(t)[r_3(t)-a_3(t)y_3(t)-d_3(t)y_1(t)/(c_3(t)y_1(t)+y_3(t))+(k_2(t)d_2(t-f_3)\cdot y_2(t-f_3))/(c_2(t-f_3)y_3(t-f_3)+y_2(t-f_3))]\triangleq f_{3y}.\end{aligned}\right.\tag{7}$$

定义 $y(t)=(y_1(t),y_2(t),y_3(t))$ 和 $f_y(f_{1y},f_{2y},f_{3y})$. 为方便起见,记系统(1)的乘积系统为

$$\dot x=f_x,\ \dot y=f_y.\tag{8}$$

定理 5 假设系统(1)满足初始条件(2),并且满足定理 1的条件和记号,如果系统(1)满足下列条件

$$-\underline{a}_1+\frac{\bar d_1M_2}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\frac{\bar d_3M_3}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2}<0,\tag{9}$$

$$-\underline{a}_2+\frac{\bar d_1M_1}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\frac{\bar d_2M_3}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2}<0,\tag{10}$$

$$-\underline{a}_3+\frac{\bar d_2M_2}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2}+\frac{\bar d_3M_1}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2}<0,\tag{11}$$

$$-C\triangleq-\frac{A_4}{L}+\frac{A_1L}{l^2}+\frac{A_2L}{l^2}+\frac{A_3L}{l^2}<0.\tag{12}$$

其中,$B_i,(i\in N_2)$ 的定义见定理 3,

$A_1\triangleq\max\{1,B_1,B_2\}$, $A_2\triangleq\max\{1,B_3,B_4\}$,
$A_3\triangleq\max\{1,B_5,B_6\}$,

$$-A_4\triangleq\max\left\{\begin{array}{l}-\underline{a}_1+\dfrac{\bar d_1M_2}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\dfrac{\bar d_3M_3}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2},\\ -\underline{a}_2+\dfrac{\bar d_1M_1}{(\underline{c}_1m_2+m_1)^2}+\dfrac{\bar d_2M_3}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2},\\ -\underline{a}_3+\dfrac{\bar d_2M_2}{(\underline{c}_2m_3+m_2)^2}+\dfrac{\bar d_3M_1}{(\underline{c}_3m_1+m_3)^2}\end{array}\right\}<0.$$

$L\triangleq\max\left\{\frac{1}{m_i},1,i\in N_1\right\}$, $l\triangleq\min\left\{\frac{1}{M_i},1,i\in N_1\right\}$, M

$\stackrel{\triangle}{=} \max\{M_i, i \in N_1\}$.
则系统(1)存在唯一正的概周期解 $x(t)$,并且此解是一致渐近稳定的.进而,如果系统(1)是关于 t 的周期系统(周期为 k),定理的相应结论仍然成立.

证明　根据第1部分中的讨论,把集合 S 作为初始空间,来讨论系统(1)的解的性质.首先引入下列记号 $C_M \stackrel{\triangle}{=} \{\varphi | \varphi \in C^+, \|\varphi\| \leqslant M\}$, $S_M \stackrel{\triangle}{=} \{x | x \in R^3, |x| \leqslant M\}$.

选取 Razumikhin 函数为

$$V(t) \stackrel{\triangle}{=} V(t, x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^{3} |\ln x_i(t) - \ln y_i(t)|, V: R^+ \times S_M \times S_M \to R^+.$$

容易验证 V 满足文献[6]中定理1关于 V 条件.根据微分中值定理,有

$$l\sum_{i=1}^{3} |x_i(t) - y_i(t)| \leqslant V(t, x(t), y(t)) \leqslant L\sum_{i=1}^{3} |x_i(t) - y_i(t)|.$$

则,选取 $P(s) = \frac{L}{l}s > s > 0, a(s) = ls > 0, b(s) = Ls > 0, (s > 0)$. $b(0) = a(0) = 0$,在这些假设之下,文献[6]中定理1的条件(I)满足.容易验证文献[6]中定理1的条件(II)也满足.

当 $V(t+\theta, x(t+\theta), y(t+\theta)) \leqslant P(V(t, x(t), y(t)))$, $(\theta \in [-\tau, 0])$ 时,下证文献[6]中定理1的条件(III)也满足.事实上,

$$\dot{V}|_{(8)} \leqslant \left[-\underline{a}_1 + \frac{\overline{d}_1 M_2}{(\underline{c}_1 m_2 + m_1)^2} + \frac{\overline{d}_3 M_3}{(\underline{c}_3 m_1 + m_3)^2}\right] |x_1(t) - y_1(t)| + \left[-\underline{a}_2 + \frac{\overline{d}_1 M_1}{(\underline{c}_1 m_2 + m_1)^2} + \frac{\overline{d}_2 M_3}{(\underline{c}_2 m_3 + m_2)^2}\right] |x_2(t) - y_2(t)| + \left[-\underline{a}_3 + \frac{\overline{d}_2 M_2}{(\underline{c}_2 m_3 + m_2)^2} + \frac{\overline{d}_3 M_1}{(\underline{c}_3 m_1 + m_3)^2}\right] |x_3(t) - y_3(t)| + A_1\sum_{i=1}^{3} |x_i(t - \tau_3) - y_i(t - \tau_3)| + A_2\sum_{i=1}^{3} |x_i(t - \tau_2) - y_i(t - \tau_2)| + A_3\sum_{i=1}^{3} |x_i(t - \tau_1) - y_i(t - \tau_1)| \leqslant \left(-\frac{A_4}{L} + \frac{A_1 L}{l^2} + \frac{A_2 L}{l^2} + \frac{A_3 L}{l^2}\right) V(t, x(t), y(t)) \stackrel{\triangle}{=} -CV(t).$$

根据条件(9)～(12),证得文献[6]定理1的条件(III)成立.

又根据文献[7]中的定理1.3,系统(1)存在唯一满足初始条件(2)的解,并且此解在 t 充分大时有界.否则,与系统(1)的概周期性和集合 S 的正不变性矛盾,即系统(1)存在唯一满足给定的初始条件(2)的正解 $p(t)$ 并且 $\|p(t)\| \leqslant M$.根据文献[6]的定理1,系统(1)存在唯一且一致渐近稳定的正概周期解 $x(t)$; $\mathrm{mod}(x) \subset \mathrm{mod}(f)$.进而,对于系统(1)是周期系统时仍然成立.

参考文献

1 熊佐亮.关于三种群第II类功能性反应周期系数模型研究.生物数学学报, 1998, 13 (1): 38～42.

2 刘兴臻.一类都有 Holling II 类功能性反应且具周期系数的三维顺环捕食系统的研究.生物数学学报, 1999, 14 (2): 178～184.

3 Du Xuewu, Yuan Sanling. A study on a kind of periodic model with III response function of there groups. Journal of Engineering Mathematics, 2000, 17 (3): 139～142.

4 滕志东,陈兰荪.高维时滞 Kolmogorov 系统的正周期解.高校应用数学学报, 1999, 22 (3): 446～456.

5 Barbalat I. Systems d'equations differentielle d'oscillations, nonlineaires, Rev. Roumaine Math Pures Appl, 1959, 4 261～270.

6 Yuan Rong. Existence of almost periodic solution of functional differential equations. Ann of Diff Eqs, 1991, 7 (2): 234～242.

7 徐远通.泛函微分方程与测度微分方程.广州: 中山大学出版社, 1988.

(责任编辑: 黎贞崇)