DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.01.008
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (1): 21~ 22

# $\tilde{\rho}$相依序列回归函数加权核估计

# Weighted Kernel Estimation of Regression Functions of $\tilde{\rho}$ Sequences

伍艳春
Wu Yanchun

(桂林工学院基础部 桂林市建干路 12号 541004)
( Base Dept., Guilin Institute of Technology, 12 Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 讨论$\tilde{\rho}$相依序列非参数回归函数加权核估计的强相合性.
关键词 $\tilde{\rho}$相依序列 回归函数加权核估计 强相合性
中图法分类号 O211.4

**Abstract** The strong consistency for the nonparametric weighted kernel estimators of regression function of $\tilde{\rho}$ sequences is discussed.

**Key words** $\tilde{\rho}$ sequences, kernel estimation of regression function, strong consistency

## 1 引言和结论

设 $\{X_i: i\in N\}$ 是概率空间 $(\Omega, B, P)$ 中的随机变量序列, $F_S = \sigma(X_i: i\in S\subset N)$ 为 $\sigma$-域, 在 $B$ 中给定 $\sigma$-域 $F,R$,令

$$\rho(F,R) = \mathrm{SUP}(\mathrm{corr}(Y,Z): Y\in L_2(F), Z\in L_2(R)),$$

Bradley[1,2], Bryc和 Smolenski[3]使用如下相依系数: 对 $k\geqslant 0$, 令

$$\tilde{\rho}(k) = \mathrm{SUP}\{\rho(F_S,F_T): \text{有限子集 } S,T\subset N \text{ 且 } \mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}, \quad (1)$$

显然, $0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$ 且 $\tilde{\rho}(0)=1$. 这种相依系数 $\tilde{\rho}(k)$ 与通常的 $\rho$混合系数有一定的类似,但也不完全相同.事实上,在通常的 $\rho$混合系数中,式(1)中的 $S,T$分别是 $[1,n]$和 $[n+k,\infty]$中的子集.文献[4]在$\tilde{\rho}$相依序列中得到了与独立情形一致的矩不等式:

**引理 1**[4] 设 $\tilde{\rho}:=\tilde{\rho}(1)<1, q>1, X_i$ 为 $\sigma(X_i)$ 可测且 $EX_i=0, E|X_i|^q<\infty, (i=1,2,\cdots)$,则存在仅依赖于 $\tilde{\rho},q$的正常数 $C$,使 $1<q\leqslant 2$时,有

$$E\left|\sum_{i=a+1}^{a+n} X_i\right|^q\leqslant C\sum_{i=a+1}^{a+n} E|X_i|^q, \forall n\geqslant 1, a\geqslant 0,$$

$q>2$时,有:

$$E\left|\sum_{i=a+1}^{a+n} X_i\right|^q\leqslant C\left\{\sum_{i=a+1}^{a+n} E|X_i|^q+\left(\sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2\right)^{q/2}\right\}, \forall n\geqslant 1, a\geqslant 0.$$

利用此引理,本文在$\tilde{\rho}$相依下讨论非参数回归函数加权核估计的强相合性.

设 $Y_1, Y_2,\cdots,Y_n$ 是固定点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $n$个观察值,满足

$$Y_i = g(x_i)+\varepsilon_i, 1\leqslant i\leqslant n,$$

其中 $g(x)$是 $[0,1]$上的未知函数,且把 $g(x)$在 $[0,1]$外的值定义为 0, $\{\varepsilon_i\}$ 是随机误差序列,且假定 $0=x_0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n=1$. Priestley和 Chao[5]对未知函数 $g(x)$提出一种加权核估计

$$g_n(x)=\sum_{i=1}^{n} Y_i\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right),$$

其中 $K(\cdot)$是 Borel可测函数, $0<h_n\to 0$(当 $n\to\infty$).记 $\delta_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$,本文使用如下基本条件:

(I). $K(\cdot)$在 $R^1$上满足 $\alpha(\alpha>0)$阶 Lipschitz条件,且$\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)\mathrm{d}u=1,\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u<\infty$, $K(\cdot)$在 $R^1$上有界;

(II). $g(\cdot)$在 $[0,1]$上满足 $\beta(\beta>0)$阶 Lipschitz条件;

(III). 当 $n\to\infty$ 时, $h_n\to 0, \delta_n\to 0$;

(IV). 当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{h_n}\left\{\left(\frac{\delta_n}{h_n}\right)^{\alpha}+\delta_n\right\}\to 0$.

在独立情形下,文献[6~8]讨论了 $g_n(x)$ 的极限性质,文献[9,10]将讨论推广到 $\varphi$-混合的情形,文

2001-03-13收稿, 2001-10-11修回。

献 [11]又进一步得到了 ρ-混合、φ-混合下的结论 . 本文在 $\tilde{\rho}$相依下得到如下结论:

**定理 1** 设基本条件 (Ⅰ) ~ (Ⅳ) 成立, 又设:

(i) 存在 $\lambda > 0$, 使 $W_n / h_n = O(n^{-\lambda})$; (2)

(ii) $\tilde{\rho}: = \tilde{\rho}(1) < 1, r > \max(1 + 1/\lambda, 2/\lambda, 2)$, $X_i$ 为 $e(Y_i)$ 可测, 且

$$EX_i = 0, \sup_i E|X_i|^r < \infty, i = 1, 2, \cdots$$

则 $g_n(x)$ 完全收敛于 $g(x)$.

**推论 1** 设基本条件 (Ⅰ)、(Ⅱ) 成立, 并设 $\tilde{\rho}: = \tilde{\rho}(1) < 1, r > \max(1 + 1/\lambda, 2/\lambda, 2)$, $X_i$为 $e(Y_i)$ 可测, 且 $EX_i = 0, \sup_i E|X_i|^r < \infty, i = 1, 2, \cdots$. 若取

$$W_n = O\left((\log n)^p / n\right), h_n = n^{-l}, \quad (3)$$

其中 $p \geqslant 0, 0 < l < \min\{T, U/(1 + U)\}$,

则 $g_n(x)$ 完全收敛于 $g(x)$.

**定理 2** 设基本条件 (Ⅰ) ~ (Ⅳ) 成立, 又设

(i) $\tilde{\rho}: = \tilde{\rho}(1) < 1, r > 1$, $X_i$为 $e(Y_i)$ 可测, 且 $EX_i = 0, \sup_i E|X_i|^r < \infty, i = 1, 2, \cdots$

(ii) 存在 $\lambda$ 满足 $1/r < \lambda < 1$ 使 (2) 式成立, 则

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x), \text{a. s.} \quad (4)$$

**推论 2** 设基本条件 (Ⅰ)、(Ⅱ) 成立, 并设 $\tilde{\rho}: = \tilde{\rho}(1) < 1, r > 1$, $X_i$为 $e(Y_i)$ 可测, 且 $EX_i = 0, \sup_i E|X_i|^r < \infty, i = 1, 2, \cdots$. 若取 $p, l$满足 $p \geqslant 0, 0 < l < \min\{T, U/(1 + U), 1 - 1/r\}$ 使 (3) 式成立, 则 (4) 式也成立 .

**引理 2**[10] 设基本条件 (Ⅰ) ~ (Ⅳ) 成立, 则 $\lim_{n \to \infty} Eg_n(x) = g(x)$.

**引理 3**[10] 设基本条件 (Ⅰ)、(Ⅲ)、(Ⅳ) 成立, 则

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} \left| K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right) \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} |K(u)| \, du,$$

$\forall x \in [0, 1]$.

本文约定: 记号“ $<<$ ”表示通常的大“ $O$ ”; $I_A$ 表示集合 $A$上的示性函数 .

## 2 定理的证明

**定理 1的证明** 记 $a_{ni} = \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)$, 则

$$g_n(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i + [Eg_n(x) - g(x)], \quad (5)$$

由引理 2知, 问题归结为考虑 $\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$.

利用引理 1 $K(\cdot)$ 有界、引理 3和 (2) 式即得证, 证明方法与文献 [11]中定理 4的证明类似 .

**推论 1的证明** 由 (3) 式可验证 (2) 式和基本条件 (Ⅲ)、(Ⅳ) 成立, 从而由定理 1即得结论 .

**定理 2的证明** 沿用 (5) 式记号, 因为 $1/r < \lambda < 1$且 $r > 1$,

所以 $(1 - \lambda)/(r - 1) < \lambda$.

从而可取 $f > 0$和 $S > 0$使 $(2S + 1 - \lambda)/(r - 1) < f < \lambda$.

令

$$X_{ni}(1) = X_i I_{(|X_i| \leqslant n^f)}, X_{ni}(2) = X_i - X_{ni}(1),$$

$$\tilde{X}_{ni}(1) = X_{ni}(1) - EX_{ni}(1), \tilde{X}_{ni}(2) = X_{ni}(2) - EX_{ni}(2),$$

$$S_n(1) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} \tilde{X}_{ni}(1), S_n(2) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} \tilde{X}_{ni}(2).$$

则只需证明: $S_n(1) \to 0$, a. s. 和 $S_n(2) \to 0$, a. s. 即可 .

先证 $S_n(1) \to 0$, a. s.

利用引理 1 $K(\cdot)$ 有界、引理 3和 (2) 式即得证, 证明方法与文献 [11]中定理 5的证明类似 .

再证 $S_n(2) \to 0$, a. s. 证明方法与文献 [11]中定理 5的证明类似 .

推论 2直接由定理 2得到 .

### 参考文献


1 Breadley R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields. J Theoret Probab, 1992, 5: 355~ 374.

2 Bradley R C. Equivalent mixing conditions for random fiel-ds. Technical Report No. 336, Univ of North Carolina, Chapel Hill: Center for Stochastic Processes, 1990.

3 Bryc W, Smolenski W. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables. Proceeding of American Math Society, 1993, 119 (2): 629~ 635.

4 杨善朝 . 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用 . 科学通报, 1998, 17 (43): 1823~ 1827.

5 Priestley M B, Chao M T. Nonparametric function fitting. J R Statist Soc B, 1972, 34: 385~ 392.

6 Benedetti J K. On the nonparametric estimation of regression functions. J R Statist Soc B, 1977, 39: 248~ 253.

7 秦永松 . 非参数回归函数估计的一个结果 . 工程数学学报, 1989, 6 (3): 120~ 123.

8 Schster E, Yakowitz S. Contributions to the theory of nonparametric regression, with application to system identification. Ann Statist, 1979, 7 (1): 139~ 149.

9 秦永松 . 相依误差下非参数回归函数估计的强相合性 . 广西师范大学学报, 1992, 10 (2): 24~ 27.

10 杨善朝 . φ-混合误差下非参数回归函数加权核估计的相合性 . 高校应用数学学报, 1995, 10 (2): 231~ 238.

11 杨善朝 . 混合序列矩不等式和非参数估计 . 数学学报, 1997, 3: 276~ 279.


(责任编辑: 黎贞崇)