DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2002.01.004
广西科学 Guangxi Sciences 2002, 9 (1): 11~ 12

关于 Hardy不等式的一个加强
A Strengthened Hardy's Inequality

杨启贵
Yang Qigui

(广西师范大学数学与计算机科学学院，桂林市育才路 3号， 541004)
(College of Math.& Comp.， Guangxi Normal Univ.， 3 Yucailu， Guilin， Guangxi， 541004， China)

摘要 对 Hardy不等式一种加强，所得结果推广了相关文献的结论且给出一个简化证明 .
关键词 Hardy不等式 权系数 算术几何平均值不等式
中图法分类号 O178

Abstract A strengthened Hardy's inequality is obtained. The results in the relevant reference are generalized and the proof is simplified.

Key words Hardy's inequality, weight coefficient, arithmeticgeometric average inequality.

经典的 Hardy 不等式[1]描述如下:

设 $\lambda_n > 0, \Lambda_n = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m, a_n \geqslant 0 (n \in N)$ 且 $0 < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n < \infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}} < e \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n. \tag{1}$$

在附加条件 $0 < \lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n (n \in N)$，则不等式为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n+1} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}} < e \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n. \tag{2}$$

最近，文献 [2]给出 Hardy不等式 (2)一个改进，获得下列结果 .

定理 A[2] 若 $0 < \lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n, \Lambda_n = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m, a_n \geqslant 0 (n \in N)$ 且 $0 < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n < \infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n+1} (a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}} <$

$$e \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{2(\Lambda_n + \lambda_n)}\right) \lambda_n a_n. \tag{3}$$

由于该不等式在分析等方面的作用和广泛应用，因而引起人们广泛关注，且出现大量文献研究它的不同推广和应用[1,4~6].

本文获得 Hardy不等式一种加强及文献 [2~ 4]的结果改进，且给出了一个新的简洁证明 .

为证明方便，首先介绍下列 2个引理 .

引理 1[1] 设 $T_m \geqslant 0, q_m > 0, (m = 1, 2, \cdots, n)$，$\sum_{m=1}^{n} q_m = 1$，则

$$T_1^{q_1} T_2^{q_2} \cdots T_n^{q_n} \leqslant \sum_{m=1}^{n} q_m T_m. \tag{4}$$

引理 2 设 $x \in [1, \infty]$，则

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x + \frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x + \frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

证明 作下列辅助函数

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x + \frac{1}{5}}\right), x \in [1, \infty).$$

易知

$$f'(x) = -1/(x+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1/\left[2\left(x + \frac{6}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)\right],$$

且当 $x \in [1, \infty)$ 时，可以证明

$$f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2\left(x + \frac{1}{5}\right)^2} - \frac{1}{2\left(x + \frac{6}{5}\right)^2}$$

$$= -\frac{5x(25x^2 + 10x - 7) + 72}{1250x(x+1)^2\left(x + \frac{6}{5}\right)^2\left(x + \frac{1}{5}\right)^2} < 0.$$

因而，$f'(x)$ 在 $[1, \infty)$ 上是递减，由此，可得 $f''(x) >$

2001-09-04收稿， 2001-10-25修回。

$\lim\limits_{x\to\infty} f''(x) = 0$ 当 $x\in[1,\infty)$. 所以, $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上是递增的. 根据函数 $f(x)$ 的定义,可导出

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} < e.$$

类似地,再定义辅助函数

$$g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{5}}\right), x\in[1,\infty),$$

经计算可证得 $g''(x) > 0$ 当 $x\in[1,\infty)$. 因而 $g'(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上是递增的. 于是, $g''(x) < \lim\limits_{x\to\infty} g''(x) = 0$ 当 $x\in[1,\infty)$时,所以, $g(x)$ 在 $[1,\infty)$上是递减的. 由 $g(x)$ 可推得

$$e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证毕.

注 直接计算可得

$$\frac{6x+2}{6x+5} < \left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{1}{2}} < \left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} < \frac{2x+1}{2x+2}, x\in[1,\infty). \qquad (6)$$

因此,文献[4]中定理 2.1是引理 2的一个特例.

定理 1 设 $0<\lambda_{n+1}\leqslant\lambda_n$, $\Lambda_n=\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_m$, $a_n\geqslant 0$ ($n\in N$) 且 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n<\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n+1}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}} < e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\frac{1}{5}\Lambda_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\lambda_n a_n. \qquad (7)$$

证 选取 $c_n>0$, $T_m = c_m a_m$ 和 $q_m=\lambda_m\Lambda_m$ ($m=1,2,\cdots,n$), 根据引理 1可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n+1}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}-a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n+1}\frac{(c_1a_1)^{\lambda_1/\Lambda_1}(c_2a_2)^{\lambda_2/\Lambda_2}\cdots(c_na_m)^{\lambda_m\Lambda_m}}{(c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}}}\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_{n+1}}{(c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}}}\right]\frac{1}{\Lambda_n}\sum_{m=1}^{n}c_n\lambda_m a_m = \sum_{m=1}^{\infty}c_n\lambda_m a_m\cdot$$

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\Lambda_n(c_1^{\lambda_1}c_2^{\lambda_2}\cdots c_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}}} = \sum_{m=1}^{\infty}c_m\lambda_m a_m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\Lambda_n\Lambda_{n+1}} =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m a_m\left(c_n\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\Lambda_n\Lambda_{n+1}}\right)\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\Lambda_m/\lambda_m\right)^{\Lambda_m/\lambda_m}\lambda_m a_m.$$

再由引理 2,可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n+1}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}} < e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\frac{1}{5}\Lambda_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\lambda_n a_n.$$

定理 1证毕.

根据不等式(7)和定理 1,可得下列推论.

推论 1[2] 若 $0<\lambda_{n+1}\leqslant\lambda_n$, $\Lambda_n=\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda_m$, $a_n\geqslant 0$ ($n\in N$) 且 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n<\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{n+1}(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\Lambda_n}} < e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{2(\lambda_n+\Lambda_n)}\right)\lambda_n a_n, \qquad (8)$$

当 $\lambda_m=\lambda_{m+1}=1$时,可得 $\lambda_m/\Lambda_m=1/m$ ($m=1,2,\cdots,n$),应用定理 1和(7)式取 $x=n\in N$时,有

推论 2 若 $a_n\geqslant 0$ ($n\in N$) 和 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$, 则

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}}a_n.$$

(文献[3]的定理 1) (9)

$$\text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < e\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}\right)a_n.$$

(文献[4]的定理 3.1) (10)

注 不等式(7)~(10)是下列著名的 Carleman 不等式的改进.

推论 3[1] 若 $a_n\geqslant 0$ ($n\in N$) 且 $0<\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < e\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \qquad (11)$$

参考文献

1 Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities. U K: Cambridge University Press, 1952.

2 Yang Becheng. On Hardy's inequality. J Math Anal Appl, 1999, 234: 717~722.

3 Yan Ping, Sun Guozheng. A strengthened Carleman's inequality. J Math Anal Appl, 1999, 240: 290~293.

4 Yang Becheng, Debnath L. Some inequality involving the constant e and application to Carleman's inequality. J Math Anal Appl, 1998, 223: 347~353.

5 Mikhin S G. Constants in some inequalities of analysis, Wiley, New York, 1986.

6 Mitrinovic D S. Analysis inequalities. New York: Springer-Verlag, 1970.

(责任编辑: 黎贞崇)