

基于 Laplacian 算子的法向网格生成*

Normal Mesh Generation Based on Laplacian Operator

李现民 李桂清** 徐小玲*** 李华
Li Xianmin Li Guiqing Xu Xiaoling Li Hua

(中国科学院计算技术研究所智能信息处理开放实验室 北京 100080)

(Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology,
Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080, China)

摘要 多分辨率法向网格是网格的一种多分辨率表示方法, 其中每一个分辨率层次都是它的前一层法向的偏移。因而除基网格顶点外, 其它顶点都可表示为一个标量形式。本文提出一个生成法向网格的算法, 对 Igor Guskov 等人的方法作了改进。首先, 在计算基网格的网格简化过程中, 记录下每个基网格三角形在原始网格中的相关三角形集, 以此来提高求交效率同时仍保证较高的准确性。其次, 增加了处理边界情形的能力。最后, 利用 Laplacian 算子的切向分量对法向网格进行重新参数化, 使得网格的三角形分布更均匀, 三角形的形状也更为正则。从实验结果可以看到, 本文的算法具有较强的实用性, 所得到的法向网格与原始网格的逼近误差也很小。

关键词 法向网格 网格简化 细分 多分辨率 Laplacian 算子

中图法分类号 TP391

Abstract A normal mesh is a multiresolution mesh where each level can be written as a normal offset from a coarser version. Hence each vertex of the mesh can be stored as a scalar value except for the vertices of a base mesh. An algorithm for generating the normal mesh is presented by improving the method of Guskov et al. An associated triangle set for each triangle of the base mesh in the process of mesh simplification is recorded firstly for enhancing efficiency and sustaining exactness, then the models with boundaries is treated in similar way. Moreover, the Laplacian operator is employed to optimize the distribution and the shape of triangles of the normal mesh. Through the experiment, it is found that the present method is feasible and the error between the original mesh and the approximate mesh is very small.

Key words normal mesh, mesh simplification, subdivision, multiresolution, Laplacian operator

随着医学、工业 CT 及三维扫描仪等三维数据获取设备的迅速普及, 复杂网格模型尤其是三角网格模型的使用变得越来越普遍。如何对这些网格数据进行存储、传输、绘制及其它处理是目前图形学研究的重要问题。

一种有效的途径是对网格模型进行简化, 其本质是在减少网格三角面和顶点数目的同时尽量保持原

始模型的拓扑结构。边界和尖锐棱边之类的形状特征。经过近些年的研究, 人们已经提出了大量简化算法。例如自适应分割算法^[1]、顶点聚类算法^[2,3]、超面算法^[4]、顶点删除算法^[5]、三角形折叠算法^[6,7]和边折叠算法^[8~11]等等。

然而上述简化方法得到的网格模型很难支持诸如多尺度编辑这样的复杂操作。为此 Eck 等人提出了基于小波的多分辨率分析方法^[12]。该方法首先利用 Voronoi 图和 Delaunay 剖分技术求出保持原始网格拓扑的基网格; 其次, 利用调和映射对原始网格进行参数化求得一个具有细分连通特性的逼近网格; 然后, 利用 Lounsbery 的细分曲面小波分析框架^[13]建立逼近网格关于基网格的小波分析, 把逼近网格表示成基网格加小波系数(细节)的形式。Eck 等人的这一方法建立了多分辨率网格的统一表示而且具有坚实的

2001-08-15 收稿, 2001-09-24 修回。

* 国家重点基础研究发展规划 (973) 项目 (G1998030607)。

** 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江杭州。(The State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang, 310027)。

*** 北京工业大学电子信息与控制工程学院, 北京, 100007 (Electronic Information & Control Engineering College, Beijing Polytechnic University, Beijing, 100007)。

理论基础,但其中的小波系数是三维向量。为进一步压缩数据, Aaron Lee 提出一个基于细分的位移表面表示方法,把一个复杂的表面网格模型表示为一个平滑的基网格模型上的标量位移^[14]。细分位移表面仅仅给出定义在基网格模型上的一个层次细节,没有建立多分辨率表示。Igor Guskov 等人的法向网格则是一种多分辨率模型,其中每一个层次都是其前一层的法向偏移^[15]。为了建立基网格和原始网格的一一对应以便于求交,需要利用 MAPS 技术^[16]计算原始网格关于基网格的参数化。MAPS 是一种相当复杂的技术。此外, Igor Guskov 等人的工作只处理了封闭的网格模型^[15]。

为了提高效率,我们不采用参数化,而是在简化过程中记录和简化后每个三角面在原始网格中的相关三角形集。在计算法向细节时,只对所有与该法向所在三角面相关的原始三角面的交点,以达到限制求交范围并提高准确度的目的。我们对边界情形也作了处理,从而使本算法适用于带边界的网格模型。此外,为了使网格中三角形的分布较为合理,三角形形状较为正则,我们还使用了 Laplacian 算子的切向分量对法向网格进行了去噪处理。

1 算法的主要步骤

1.1 抽象单纯复形和法向网格

首先给出单纯复形、网格和法向网格的概念。设 $V = \{1, \dots, N\}$, $E \subseteq V \times V$, $F \subseteq V \times V \times V$, 这里不区分循环的数据组,比如认为 (3, 5) 和 (5, 3)、(1, 2, 4) 和 (2, 4, 1) 都是相同的元素。称三元组 $K = \{V, E, F\}$ 为抽象单纯复形,如果对任何 $\{i, j, k\} \in F$ 总有 (i, j) 、 (j, k) 和 $(k, i) \in E$ 分别称 V 、 E 和 F 中的元素为顶点、边和面。只属于一个面的边称为边界边,边界边的顶点称为边界顶点。如果, $\{i, j\} \in E$, 那么 i 和 j 相邻。集合 $N(i) = \{j | \{i, j\} \in E\}$ 称为 i 的邻接环。

三角形网格 M 是一个三元组 (K, P) , 其中 $K = \{V, E, F\}$ 为抽象单纯复形,

$$P = \{v \in R^3 | \llcorner \llcorner N\}$$

是顶点坐标集合, v 为顶点 $i \in V$ 的坐标。

考虑网格序列 $H = \{M^0, M^1, \Delta, M^j, \Delta\}$, 其中 $M^j = \{P^j, K^j\}$ 且满足 $P^j \subset P^{j+1}$, 称 H 为一个层次网格模型。如果对任意顶点 $v \in P^{j+1} - P^j$ 都能找到依赖于 P^j 的一个基点 b 及 b 处法向 n 使得 $v = b + sn$, 其中 s 是一个标量值,那么称 M^{j+1} 称为以 M^j 为基网格的法向网格。如果对所有的 j , M^{j+1} 都是以 M^j 为基网格的法向网格,则称 H 为一个多分辨率法向网格。

模型。

1.2 算法的基本步骤

根据 1.1 节的定义,要建立法向网格首先要从原始网格获取具有相同拓扑结构但简单得多的基网格 M^0 。为了在 M^0 中加入新顶点,第 2 步是利用某种细分模式对 M^0 作一次细分得到新网格 M^1 。由于 M^1 中的新顶点一般不会位于原始网格上,接着需要从这些新顶点引出法线,求法线与原始网格的交点,并用交点代替相应的新顶点得到法向网格 M^1 ,这里交点用一个标量来保存。考虑到新顶点及法向采样会产生噪声,还要用 Laplacian 算子对法向网格进行平滑处理。把 M^1 作为新的基网格重复以上过程得到 M^2 。不断重复此过程就可以建立多分辨率网格模型。

2 网格模型简化

我们使用类似于 Garland 和 Heckbert 提出的边折叠简化算法^[10]来生成基网格 $M^0 = (P^0, K^0)$ 。但是,为了便于后续处理,我们对简化算法作了如下修改:

(I) 为保证基网格的顶点是原始网格顶点,对边进行折叠时,新顶点只从该边的两个端点中选取,而不是象原算法那样从两端点和中点之中选取。如图 1 中左边网格所示,边 v_1v_2 折叠后新顶点 v 将是 v_1 和 v_2 之一,右边示意图是取 $v = v_2$ 。

(II) 此外,为记录原始三角形中与基网格的三角形相关的三角形集合,需要建立相应的数据结构用以保存这些三角形集。仍以图 1 中的边折叠为例,对于和顶点 v 相邻的任一三角形,由于 $v = v_2$,因此与 $\Delta_{v_1v_2v_3}$ 和 $\Delta_{v_1v_2v_4}$ 相关的原始三角形集不变,而其它与 v 相邻的新三角形的原始三角形集为所有 v_1 的相邻三角形的相关原始三角形集之并。

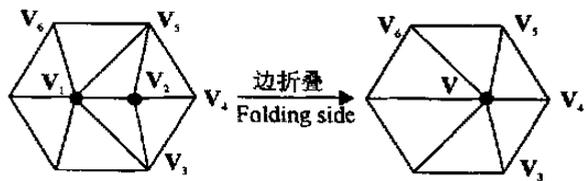


图 1 内部边折叠示意图

Fig. 1 Internal edge collapse

(III) 对基网格的边界边也作类似的处理。记录下基网格上每条边界边在原始网格中的相关边界边集。以图 2 为例,假设边 v_2v_3 折叠到 v_2 ,即图 2 中 $v = v_2$,那么新生成的边 vv_1 的原始网格相关边集不变,而 vv_4 的原始网格相关边集为 v_2v_3 和 v_3v_4 的原始网格相关边集之并。

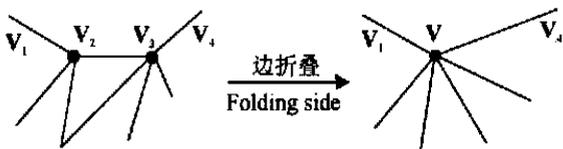


图2 边界边折叠示意图

Fig. 2 Boundary edge collapse

3 法向细节计算

有了基网格 $M^0 = (P^0, K^0)$, 就可以计算法向网格 M^1 . 首先用某种细分模式对 M^0 作细分得到新网格 M^s . M^s 中有一些不属于 M^0 新顶点 (称为基点), 一般说来这些新顶点不会位于原始网格 M 上. 假设有基点 $v \in M^s - M^0$, v 的法向为 n , M^0 在 v 处的法线与原始网格的交点为 p , 那么存在标量 d , 使得

$$p = v + dn. \quad (1)$$

d 就是所谓的法向细节. 根据上述描述, 法向细节计算可分为如下几个步骤. 首先, 选定某种细分模式计算基点; 其次, 估计细分后的网格在该点处的法向; 最后计算该点处法线与原始网格的交点从而得到 d . 下面分别讨论各步骤的具体做法.

3.1 细分模式选取

为了避免计算旧顶点的法向细节, 必须要求所选择的细分模式是插值模式, 使得旧顶点位于原始网格上. 此外, 希望该细分模式尽量简单. 关于细分模式的有关内容可参见文献 [17].

Igor Guskov 等人的工作采用的是蝶形细分模式 [15, 18]. 蝶形模式计算新顶点的面具较为复杂, 如图所示. 这意味着为计算图中实心圆点所示的新顶点, 需要找出图中蝶形所示的其它 8 个顶点, 计算比较复杂. Aron Lee 等人则采用 Loop 细分模式 [14, 19]. 这是一种逼近模式, 其新旧顶点的位置都需要重新计算, 旧顶点不再位于原始网格上, 不但要计算旧顶点的法向细节, 也不利于多分辨率的表示 [15].

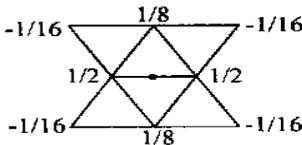


图3 蝶形模式面具

Fig. 3 The mask of the butterfly scheme

本文采用最简单的细分模式: 线性细分模式. 所用到的新顶点插入方法与 Loop 模式和蝶形模式一样, 都是三角形 1-4 分裂. 亦即在旧网格的每条边上插入一个新顶点, 然后同一个三角形上的这三个新顶点两两连接以形成新网格, 从而把一个三角形分裂成 4 个三角形 (见图 4). 由于采用线性细分, 旧顶点保持

不变, 新顶点就是所在边的中点, 从而极大简化了细分计算过程.

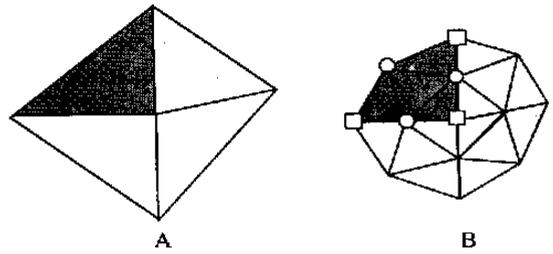


图4 1-4 分裂示意图

Fig. 4 1-4 Splitting.

A: 初始网格; B: 分裂的结果, \circ : 新插入的顶点, \square : 旧顶点. A: Initial mesh, B: Result of split, \circ : New vertices, \square : Old vertices

3.2 法向估计

经过细分后得到新网格 M^s , 如果把它当作某个切平面连续的曲面的逼近, 则可以估计它的每个顶点的法向向量. 有很多计算离散曲面法向的方法, 比如一次或二次曲面拟合方法 [20], 基于有限元面积的方法 [21] 等等. 为简化计算, 本文采用前面提到的这些方法计算基网格 M^0 上所有顶点的法向, 新插入的边顶点的法向则取为相应边的两个端点法向的平均值.

3.3 求交

对 M^s 中的每个新顶点计算该点法线与原始网格的交点以确定法向细节是算法的关键. 为了能快速准确地求出交点, Aron Lee 等人的子分位移曲面和 Igor Guskov 等人的法向网格算法都用 MAPS 进行参数化 [14, 15]. 由于建立了从基网格到原始网格的映射, 可以把求交范围限制在原始网格的局部范围内, 同时也使得交点尽可能符合要求即保证求交的正确性. 前面已经提到建立 MAPS 参数化是非常复杂的过程.

为了缩小求交范围并保证由求交的正确性, 本文采用一种较为简单的方法. 即在进行网格简化时记录下原始网格中与基网格的每个三角形相关的三角形集. 从基三角形上引出的法线只与该三角形的相关原始三角形集求交.

如果交点落在原始网格某个三角形的内部, 就将这个交点作为候选点. 如果有多个这样的交点则选取法向细节绝对值最小的那个作为所求交点. 当交点落在原始网格三角形之外时, 不存在法向细节. 此时以基点到相应的原始三角形集的最近点作为所求交点.

对边界情形需作单独处理. 具体在求交时, 对基网格边界边上的新顶点, 只需计算它到相应边界边的原始相关边界边集的最近点作为所求交点. 当然和交点落在原始网格三角形之外的情形一样, 这样的交点

不能简单地以一个标量来表示

以交点代替 M^0 中相应新顶点得到的网格记为 $M^1 = (P^1, K^1)$ 。当然实际存储时,只保存 M^0 及法向细节(该细节是一个实数,而不象顶点坐标那样是三元组),只有少数例外情形(无法向细节的内部情形和所有边界情形)仍需要保存在一个三元组(交点与基顶点的差值)如果需要保留原始网格更多的细节可以把 M^1 作为基网格,重复前面所述的过程 $M^2 = (P^2, K^2)$,这一过程可以继续下去,直到满足某些给定要求为止

4 网格三角形的均匀分布处理

由于采用线性细分计算 M^0 新插入顶点的位置和法向量,因此通过对原始网格采样得到的法向网格 M^1 会产生混淆。具体表现是 M^1 上的三角形形状及分布都不太理想。如图 5(a) 所示,基网格的三角形边界仍然清晰可辨,小三角形的分布极不均匀。Laplacian 算子可以滤除网格噪声,但起平滑作用的法向量部分会导致网格收缩。我们采用 Wood 等人的方法^[22],只取 Laplacian 算子的切向部分对网格进行处理,以避免网格收缩而又达到重新参数化的目的。图 5(b) 是对左图进行这一处理得到的结果

下面给出具体的计算公式。假设 v 的邻接顶点为 w, v_1, Δ, v_k , Laplacian 算子定义为

$$\lambda(v) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (v_j - v) \quad (2)$$

如果顶点 v 处的单位法向量为 n ,则算子的切向分量为^[21]:

$$T(v) = \lambda(v) - (\lambda(v) \cdot n) n \quad (3)$$

(2)式给出了沿切向的一个偏移量,因此调整后, v 顶点的新位置可由下式计算:

$$v' = v + T(v) \quad (4)$$

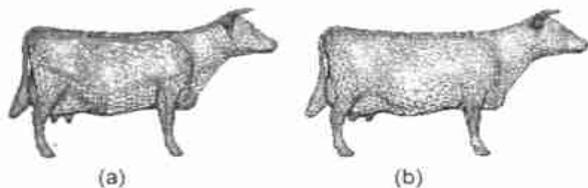


图 5 (a) 三角形分布明显保留了基网格的痕迹,分布不均匀。(b) 采用 Laplacian 算子的切向分量对网格作重新参数化后的结果

Fig. 5 (a) The non-uniform triangle distribution of the normal mesh obviously preserves the features of the base mesh. (b) The final results obtained by reparameterizing the mesh of (a) with the tangential component of Laplacian operator

当然,对于网格的边界顶点不需作(4)式的处理,因为边界部分的交点不是通过求法线与原始网格

的交点得到的,不存在法向线性采样的问题。

5 实验结果

我们实现上面所给出的算法,并对不同的数据模型作了比较,也用 Metro 测度^[23]来对所得到的法向法格与原始网格的逼近程度作了事后估计。表 1 列出了求解 3 种网格模型的法向网格的一些实验数据。从表 1 中 Metro 误差一栏可以看出所得到的法向网格与原始网格之间有相当好的逼近。此外,从表 1 还可以看出非法向细节顶点的比例相当少,说明对绝大部分新顶点都求到了正确的交点,因此简化过程中记录原始网格相关三角形集和边集的方法是相当成功的。这 3 个模型的原始网格、基网格以及第 5 层 ($j = 4$) 的法向网格的真实感图分别如图 6~ 图 8 所示

表 1 几种数据模型的实验结果

Table 1 Comparison of experimental results for a few models

模型 Model	原始网格 Triangle number of initial meshes	基网格三 角面数 Triangle number of base mesh- es	法向网格 Triangle number of normal meshes	非法向细 节顶点数 Vertex number of non-normal vertices	误差 Metro errors
牛 Cow	5 804	426	6 816	43	1.09E-5
近似立方体 Square	396	68	1 088	6	0.0E-10
面部 Face	10 377	779	12 464	1 091	1.9E-6

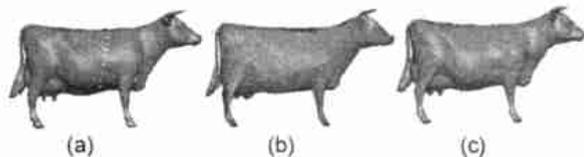


图 6 牛的原始网格、基网格和法向网格

Fig. 6 The initial mesh, base mesh and normal mesh of the cow model

(a) 原始网格; (b) 基网格; (c) 法向网格。(a) Initial mesh, (b) Base mesh, (c) Normal mesh.

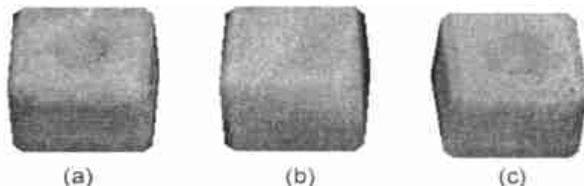


图 7 近似立方体的原始网格、基网格和法向网格

Fig. 7 The initial mesh, base mesh and normal mesh of the square model

(a) 原始网格; (b) 基网格; (c) 法向网格。(a) Initial mesh, (b) Base mesh, (c) Normal mesh.

上面的例子中,脸部模型带有边界,从图 8 可以看出改进后的算法对边界处理的效果是相当理想的。而且从表 1 可以看出,此例的非法向细节顶点数与原始网格三角面数的比例与另两例基本相同,这说明对

边界进行单独处理并没有增加更多的存储量



图 8 人脸模型的原始网格、基网格和法向网格

Fig. 8 The initial mesh, base mesh and normal mesh of the face model

(a) 原始网格; (b) 基网格; (c) 法向网格。 (a) Initial mesh, (b) Base mesh, (c) Normal mesh.

6 结语

本文提出一个构造法向网格的算法以减少网格的存储空间。本文的算法对 Igor Guskov 等人的工作作了一些改进。考虑到建立原始网格与基网格之间映射 (MAPS) 的复杂性, 我们通过在简化过程中记录和每一个三角面相关的所有原始三角形片来提高求交过程的效率和准确性。求法线与原始网格中所有相关三角形片的交点, 从所有交点中选出最近点计算法向细节。其次, 我们对边界情形进行了处理, 所有边界上的新顶点都当作非法向细节处理, 从而使本算法适用于带边界的网格模型。此外, 为了能够使三角形的分布较为均匀, 三角形形状较为正则, 我们使用 Laplacian 平滑算子在网格切向上的投影来对所得到的法向网格作重新参数化处理。从实验结果来看, 新算法获得的法向网格与原始网格之间的误差非常小, 效果也相当理想, 因此具有较好的实用性。进一步的工作可以考虑多分辨率法向网格模型的编辑、变形等处理。

参考文献

- 1 Michael J Dehaemer, Michael J Zyda. Simplification of objects rendered by polygonal approximation. *Computers & Graphics*, 1991, 15(2): 175~ 184.
- 2 Jarek Rossignac, Paul Borrel. Multiresolution 3D approximation for rendering complex scenes. *Modeling in Computer Graphics*, Falcidieno B, Kunii T L. Eds. Springer-Verlag, 1993 455~ 465.
- 3 Peter Lindstrom. Out-of-core simplification of large polygonal models. *Proceedings of SIGGRAPH*, 2000 259~ 262.
- 4 Alan D Kalvin, Russel H Taylor. Superfaces polygonal mesh simplification with bounded error. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1996, 16(3): 64~ 77.
- 5 William J Schroder, Jonathan A Zarge, William Lorensen. Decimation of triangle meshes. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1992 65~ 70.

- 6 Jonathan Cohen, Amitabh Varshney, Dinesh Manoch et al. Simplification envelopes. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1996 119~ 128.
- 7 Li Guiqing, Li Xianmin, Li Hua. Mesh Simplification based subdivision. *Proceedings of Second International Conference on Computer-Aided Industrial Design and Conceptual Design (CAID & CD '99)*, 1999, 26~28.
- 8 Hugues Hoppe, Tomy DeRose, Tom Duchamp et al. Mesh optimization. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1993 19~ 26.
- 9 Hugues Hoppe. Progressive Meshes. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1996 99~ 108.
- 10 Michael Garland, Paul S Heckbert. Surface simplification using error metrics. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1997, 209 ~ 216.
- 11 Andre Guezec. Surface simplification inside a tolerance volume. *IBM Research Division Watson T J Research Center Research Report*, 1997, RC 20440(90191).
- 12 Matthias Eck, Tony DeRose, Tom Duchamp et al. Multi-resolution analysis of arbitrary meshes. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1995 71~ 78.
- 13 Michael Lounsbery, Tony DeRose. Multiresolution analysis for surfaces of arbitrary topological type, Technical Report 93-10-05b. Department of Computer Sciences and Engineering, University of Washington, 1994.
- 14 Aaron Lee, Henry Moreton, Hugues Hoppe. Displaced Subdivision Surfaces. *Proceedings of SIGGRAPH*, 2000 85~ 94.
- 15 Igor Guskov, Kiril Vidime, Wim Sweldens et al. Normal meshes. *Proceedings of SIGGRAPH*, 2000 95~ 102.
- 16 Aaron Lee, Wim Sweldens, Peter Schroder et al. MAPS Multiresolution adaptive parameterization of surfaces. *Proceedings of SIGGRAPH*, 1998 95~ 104.
- 17 李桂清. 细分方法及应用 (博士论文), 中国科学院计算技术研究所, 2001.
- 18 Dyn N, Levid D, Gregory J A. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, 1990, 9(2): 160~ 169.
- 19 Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles. (MS Thesis). Utah Department of Mathematics, University of Utah, 1987.
- 20 Meek D S, Walton D J. On surface normal and Gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface. *CAGD*, 2000, 17(6): 521~ 543.
- 21 Mathieu Desbrun, Mark Meyer, Peter Schrader et al. Discrete Differential-Geometry Operators in [http // www. multires. caltech. edu/ pubs/pubs. htm](http://www.multires.caltech.edu/pubs/pubs.htm).
- 22 Že J Wood, Mathieu Desbrun, Peter Schrader et al. Semi-regular mesh extraction from volumes, [http // www. multires. caltech. edu/pubs/meshextraction. pdf](http://www.multires.caltech.edu/pubs/meshextraction.pdf).
- 23 Cignoni P, Rocchini C, Scopigno R. Metro measuring error on simplified surfaces. *Computer Graphics Forum*, 1998, 17(2): 167~ 174.

(责任编辑: 黎贞崇)