DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.03.002
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (3): 165~ 167

一个退化的非线性抛物型方程的行波解

Travelling Wave Solution for a Nonlinear Degenerate Parabolic Equation

陈武华
Chen Wuhua

(广西民族学院数学系 南宁市西乡塘 530006)
(Dept. of Math., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 讨论退化的抛物型方程 $(u^m/m)_t = (k(u)u_x)_x + u^n g(u)$ 的行波解问题.其中 $n \geqslant 0$, $m > 0$, g: $[0,1] \to R_+$, $g(1) = 0$ 且存在 $\theta \in (0,1)$ 使得 $g(u) \equiv 0$, $u \in [0,\theta)$, $g(u) > 0$, $u \in (\theta,1)$, $g(u)$ 在 $[\theta,1]$ 上 Lipschitz连续.证明存在唯一一个正波速的波前解,其中当 $0 < m < 1$ 时,该波前解为有限行波解,推广了文献 [5]的相应结果.

关键词 退化的抛物型方程 波前解 有限行波解
中图法分类号 O 175.29

Abstract Consider the travelling wave solution problem for the degenerate parabolic equation $(u^m/m)_t = (k(u)u_x)_x + u^n g(u)$, where $n \geqslant 0$, $m > 0$, g: $[0,1] \to R_+$, $g(1) = 0$ and exists $\theta \in (0,1)$ such that $g(u) \equiv 0$, $u \in [0,\theta)$, $g(u) > 0$, $u \in (\theta,1)$, $g(u)$ is Lipschitz continuous on $[\theta,1]$. It is proven that there exists a unique travelling wave front solution with positive wave speed and the travelling wave is a finite travelling wave if $0 < m < 1$, the corresponding results in Reference [5] are extended.

Key words degenerate parabolic equation, travelling wave front solution, finite travelling wave solution

抛物型方程的行波解是形如 $u(x,t) = u(z)$, $z = x + ct$ 的解. 由于行波解能很好地反映自然界中扰动以有限速度传播的现象[1], 所以行波解问题很快发展成为非线性偏微分方程的一个重要研究领域.

当 $g(u) \in c^{'}[0,1]$, $g^{'}(0)$, $g^{'}(1)$ 皆不为零时,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(u)$$

的行波解问题已得到充分的研究[2,3]. 本文将考虑如下退化的非线性抛物型方程

$$(u^m/m)_t = (k(u)u_x)_x + u^n g(u), \tag{1}$$

其中 $m > 0$, $n \geqslant 0$, $k \in c^{'}[0,1]$, $k(u) \geqslant \mathrm{T} > 0$, $u \in [0,1]$.

关于方程(1)行波解问题,王明新在文献[4]中作了详细讨论,主要研究了以下2种情形:

$g \in c^{'}[0,1]$, $g(1) = 0$, $g^{'}(1) < 0$, $g(u) > 0$, $u \in [0,1)$

以及

$g \in c^{'}[0,1]$, $g(1) = 0$, $g^{'}(1) < 0$ 且存在 $\theta \in (0,1)$ 使得当 $u \in (0,\theta)$ 时, $g(u) < 0$, 当 $u \in (\theta,1)$ 时, $g(u) > 0$.

本文将考虑 g 满足以下条件

$$\begin{cases} g\colon [0,1] \to R_+ \text{ 且 } g(1) = 0 \\ \text{存在 } \theta \in (0,1) \text{ 使得 } g(u) \equiv 0, \\ \quad u \in [0,\theta), g(u) > 0, u \in (\theta,1), \\ g \text{ 在 } [\theta,1] \text{ 上 Lipschitz连续}, \end{cases} \tag{2}$$

对 g 作以上假设是有意义的,因为当 $m = 1$, $n = 0$, g 满足条件(2)时,方程(1)表示的是可压缩反应气体的燃烧模型[5].

我们首先给出行波解的定义[4].

定义 1 称 $u(x,t) = u(z)$, $z = x + ct$ 为方程(1)的行波解,如果存在 $-\infty \leqslant z_l < z_r \leqslant +\infty$ 使得

$$\begin{cases} -(k(u)u^{'})^{'} + c(u^m/m)^{'} = u^n g(u), z \in (z_l, z_r), \\ u(z_l) = \mathrm{T}, u(z_r) = \mathrm{U}, u^{'}(z_l) = u^{'}(z_r) = 0, \\ \text{在 } (z_l, z_r) \text{ 的任一子区间 } (a,b) \text{ 内}, u^{'}(z) \not\equiv 0, \\ \text{当 } z \in (-\infty, z_l) \text{ 时}, u(z) \equiv \mathrm{T}, \\ \text{当 } z \in (z_r, +\infty) \text{ 时}, u(z) \equiv \mathrm{U}, \\ \text{其中 } \mathrm{T}, \mathrm{U} \text{ 是 } 0 \text{ 或者为 } g(u) \text{ 的零点} \end{cases} \tag{3}$$

c 称为波速.

2000-10-30收稿.

定义 2 在定义 1中, 若 $u(z)$在(z_l, z_r)内严格单调时, 称其为波前解;

本文只讨论方程 (1) 的波前解, 此时定义 1中的 $T=0$, $U=1$.

当 $z_l>-\infty$ 或 $z_r<+\infty$ 时, 行波解 $u(z)$ 称为有限行波解. 本文主要结果如下:

定理 设 g满足条件 (2), 则存在唯一的正常数 c,使得方程 (1) 具有波速为 c的波前解, 且当 $0<m<1$时, 该波前解为有限行波解.

文献 [5]中定理 3.1即为本定理当 $n=0$, $m=1$ 时, 方程 (1) 的行波解的存在性,其结果是上述定理的一个特例,而本文所用的方法更为简洁.

1 引理

引理 1 若 $u(z)=u(x+ct)$为方程 (1)的波前解, 则 $c>0$, $z_r=+\infty$ 且在 $(z_l,+\infty)$内, $u'(z)>0$.

证明 设 $a<b$,将方程 (1)在 $[a,b]$上积分,得到

$$-k(u(b))u'(b)+k(u(a))u'(a)+\frac{c}{m}(u^m(b)-u^m(a))=\int_a^b u^n(s)g(u(s))ds, \qquad (4)$$

取 $a=0$,令 $b\to+\infty$, 由于$\int_a^b u^n(s)g(u(s))ds$收敛 (可能为 $+\infty$), 故 $u'(b)$ 当 $b\to+\infty$ 时趋于有限极限, 由于 $u(+\infty)=1$,易知 $u'(b)\to 0$, $b\to+\infty$, 令 $b\to-\infty$,类似地有 $u'(b)\to 0$,下面,在 (4)式中分别令 $b\to+\infty$, $a\to-\infty$, 可得

$$\frac{c}{m}=\int_{-\infty}^{+\infty}u^n(s)g(u(s))ds,$$

从而 $c>0$.

实际上, 若存在 $z_0\in(z_l,+\infty)$ 使得 $u'(z_0)=0$, 则由于 $u(z_0)>0$, 由方程 (1) 有

$$-k(u(z_0))u''(z_0)=u''(z_0)g(u(z_0)), \qquad (5)$$

我们首先考虑 $u(z_0)\neq\theta$的情形, 若 $g(u(z_0))=0$, 则由初值问题唯一性, 易知 $u(z)\equiv u(z_0)$, $z\in R$, 这与行波解条件 (3) 不符. 若 $g(u(z_0))>0$, 则由 (5), $u''(z_0)<0$,从而 $u'(z)$在 z_0附近小于零, 这与 $u(z)$单调增的性质矛盾. 下面考虑 $u(z_0)=0$情形,不妨设 $g(\theta)>0$, 由于 u 单调增,故当 $z>z_0$ 时, $u(z)>u(z_0)=\theta$, 从而 $u''(z)$对于 $z>z_0$有定义. 在方程 (1) 中,令 $z\to z_0+$, 由于 $u'(z_0)=0$,故有 $u''(z_0+0)<0$,从而 $u'(z)$ 在 z_0右边附近小于零, 这也与 $u(z)$单调性矛盾.因而, $u'(z)>0$, $z\in(z_l,+\infty)$.

引理 2 设 $v=v(z)$ 为初值问题

$$\begin{cases} k(v)v'+cv^m/m=0, & z<0,\\ v(0)=\theta, \end{cases} \qquad (6)$$

的解, 则当 $m\geq1$时, $v(z)$在 $(-\infty,0)$ 上存在且 $v(z)>0$, $z<0$, $v(-\infty)=0$;当 $m<1$时,存在 $z_0<0$使得 $v(z_0)=0$且 $v(z)>0$, $z\in(z_0,0)$.

证明 当 $m\geq1$时,不存在 $z_0<0$使得 $v(z_0)=0$,否则由初值问题的唯一性, $v(z)\equiv0$, $z\leq0$,这与 $v(0)=\theta$矛盾. 从而总有 $\theta>v(z)>0$, $z<0$. 由解的延拓定理, $v(z)$在 $(-\infty,0)$上存在且 $v(z)>0$, $z<0$. 由 (6), $v'(z)<0$, $z<0$, 从而 $\lim_{t\to-\infty}v(z)$存在, 由 (6) 易证 $v(-\infty)=0$.

当 $0<m<1$时, 设 $T\leq k(v)\leq U$, $v\in[0,1]$. 则$\frac{c}{mU}v^m\leq v'\leq\frac{c}{mT}v^m$,考虑到 $v(0)=\theta$, 故有$(\theta^{1-m}+\frac{(1-m)c}{mT}z)^{\frac{1}{1-m}}\leq v(z)\leq(\theta^{1-m}+\frac{(1-m)c}{mU}z)^{\frac{1}{1-m}}$, $z<0$. 从而存在 z_0满足 $-\frac{m}{1-m}\frac{U}{c}\theta^{1-m}\leq z_0\leq-\frac{m}{1-m}\frac{T}{c}\theta^{1-m}$,使得 $v(z_0)=0$,因而 $v(z)>0$, $z\in(z_0,0)$.

引理 3 设 u, c为问题 (3)的解, 则经过平移后 (如有必要), u, c满足

$$\begin{cases} -(k(u)u')'+c(u^m/m)'=u^n g(u), & u\in R_+,\\ u(0)=\theta,\\ u'(0)=\frac{c}{m}\frac{\theta^m}{k(\theta)}, \end{cases} \qquad (7)$$

且当 $m\geq1$时, $z_l=-\infty$,当 $0<m<1$时, $z_l>-\infty$. 反之,若 u, c为 (7) 式的一个解且满足 $u'(z)>0$, $z>0$及 $u(+\infty)=1$,则 u可以延拓到成为问题 (3) 的一个解.

证明 若 u, c为 (3) 的一个解,则对任意实数 a, $u(z+a)$, c也是 (3) 的一个解. 因此不失一般性,可设 $u(0)=\theta$. 从而由 $u(z)$的单调增性,当 $z<0$时, $u(z)<\theta$. 由 g 的定义,易见 $-k(u)u'+cu^m/m=\text{const}$, $z\in(z_l,0)$. 令 $z\to z_l+$,则 $u'(z)\to u'(z_l+)=0$, $u(z)\to u(z_l+)=0$. 从而 $-k(u(0))u'(0)+cu^m(0)/m=0$,即 $u'(0)=\frac{c}{m}\frac{\theta^m}{k(\theta)}$,由于当 $z\in(z_l,0]$时, $u(z)$为初值问题

$$\begin{cases} -k(v)v'+cv^m/m=0, & z<0,\\ v(0)=\theta, \end{cases} \qquad (8)$$

的解,由引理 2, 当 $m\geq1$时, 必须有 $z_l=-\infty$, 当 $0<m<1$时, $z_l>-\infty$.

反之, 设 u, c为问题 (7) 在 R_+ 上的解, 且满足 $u'(z)>0$, $z>0$, $u(+\infty)=1$. 对 u作如下延拓: $u(z)=v(z)$, $z\in(z_l,0)$, $u(z)=0$, $z\in[-\infty,z_l]$其中 $v(z)$为初值问题 (6) 在 $(z_l,0)$上的解. 当 $m\geq1$时, $z_l=-\infty$, 当 $0<m<1$时, z_l为引理 2中的 z_0. 由引理 2,延拓后的 u, c为 (3) 式的解.

由引理 3, 求解问题 (3) 归结为问题 (7) 是否存

在 u 及 c 满足 $u'(z) > 0, z > 0$ 且 $u(+\infty) = 1$. 设 $u = u(z)$ 为问题(7)的解, 若令 $p = k(u)u'$, 则存在 $u > 0$ 的地方有

$$\begin{cases} u' = \dfrac{p}{k(u)}, \\ p' = \dfrac{cp}{k(u)}u^{m-1} - u^n g(u), \end{cases} \tag{9}$$

且 $u(0) = \theta, p(0) = \dfrac{c}{m}\theta^m$.

设 $D = \{(u,p) | 0 < u < 1, p > 0\}$. Γ_c 为方程组(9)从 $(\theta, \frac{c}{m}\theta^m)$ 出发的轨线, 通过简单的相平面分析[6], Γ_c 一定进入区域 D, 且最终只有 3种可能走向: (i) 与直线 $u = 1(p > 0)$ 相交后离开区域 D; (ii) 进入奇点 $(1,0)$; (iii) 与 u 轴 $(\theta < u < 1)$ 相交后, 离开区域 D. 于是问题(3)归结为是否存在 $c > 0$, 使得方程组(9)从 $(\theta, \frac{c}{m}\theta^m)$ 出发的轨线 Γ_c 进入奇点 $(1,0)$. 记 $H_+ = \{c > 0 | \Gamma_c$ 与直线 $u = 1(p > 0)$ 相交$\}$, $H_- = \{c > 0 | \Gamma_c$ 与 u 轴 $(0 < u < 1)$ 相交$\}$.

引理 **4** H_+、H_- 为互不相交的开集.

证明 由相平面分析易知 $H_+ \cap H_- = \varnothing$, 下面证明 H_+ 为开集. 设 $c_0 \in H_+$, 则存在 t_1 及 $X > 0$, 使得 $t = t_1$ 时, 轨线 Γ_c 与直线 $u = 1(p > 0)$ 相交, 而当 $t = t_1 + X$ 时, $\Gamma_c \in D_1 = \{(u,p) | u > 1, p > 0\}$. 由解对参数 c 的连续依赖性, 当 c' 充分靠近 c 时, 在 $t = t_1 + X$ 时刻, 也有 $\Gamma_{c'} \in D_1$, 从而存在 $t_2 < t_1 + X$ 使得 $\Gamma_{c'}$ 与直线 $u = 1(p > 0)$ 相交. 故 $c' \in H_+$. 因此 H_+ 为开集. 类似地可以证明 H_- 也是开集.

下面证明 H_+、H_- 均非空. 记 Γ_c 的轨线方程为 $p = p_c(u)$, 则 $p_c(\theta) = \dfrac{c}{m}\theta^m$, 且具有斜率

$$\frac{dp_c}{du} = cu^{m-1} - \frac{k(u)u^n g(u)}{p_c}. \tag{10}$$

引理 **5** 当 $c \geqslant c_+ = \dfrac{m}{\theta^m}(2\int_\theta^1 k(s)s^n g(s)ds)^{\frac{1}{2}}$, Γ_c 与直线 $u = 1(p > 0)$ 相交.

证明 当 $u > \theta$ 时, $\dfrac{dp_c}{du} = cu^{m-1} - k(u)u^n\dfrac{g(u)}{p_c} > -k(u)u^n\dfrac{g(u)}{p_c}$, 即 $\dfrac{1}{2}\dfrac{dp_c^2}{du} > -k(u)u^n g(u)$. 记 $W_c(u) = \dfrac{1}{2}p_c^2(u)$, $W_0(u) = \int_u^1 k(s)s^n g(s)ds$, 则 $\dfrac{dW_c(u)}{du} > \dfrac{dW_0(u)}{du}$, $u > \theta$. 又由于 $c \geqslant c_+$, 故 $W_c(\theta) \geqslant W_0(\theta)$. 因此 $W_c(u) > W_0(u)$, $u > \theta$, 即轨线 Γ_c 严格位于曲线 $p = (2w_0(u))^{\frac{1}{2}}$ 之上, 又由于 $p = (2w_0(u))^{\frac{1}{2}}$ 恰好经过奇点 $(1,0)$. 故 Γ_c 必与直线 $u = 1(p > 0)$ 相交.

引理 **6** 当 $c \leqslant c_- = m(2\int_\theta^1 k(s)s^n g(s)ds)^{\frac{1}{2}}$, Γ_c 与 u 轴 $(\theta < u < 1)$ 相交.

证明 当 Γ_c 位于区域 D 时, $\dfrac{dp_c}{du} = cu^{m-1} - k(u)u^n\dfrac{g(u)}{p_c} < cu^{m-1}$, 可知 $p_c(u) < \dfrac{c}{m}u^m$. 于是 $\dfrac{dW_c}{du} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dp_c^2}{du} = cu^{m-1}p_c(u) - k(u)u^n g(u) < \dfrac{c^2}{m}u^{2m-1} - k(u)u^n g(u)$. 记 $W_0(u) = -\dfrac{c^2}{2m^2}(1 - u^{2m}) + \int_u^1 k(s)s^n g(s)ds$, 则 $\dfrac{dWc}{du} < \dfrac{dWo}{du}$, 又由于 $c \leqslant c_-$, 从而 $W_c(\theta) \leqslant W_o(\theta)$. 故 $W_c(u) \leqslant W_o(u)$, 即 $p_c(u) < (2W_o(u))^{\frac{1}{2}}$. 从而轨线 Γ_c 严格位于曲线 $p = (2W_o(u))^{\frac{1}{2}}$ 之下, 而 $p = (2W_o(u))^{\frac{1}{2}}$ 恰好经过 $(1,0)$ 点, 于是 Γ_c 与 u 轴 $(\theta < u < 1)$ 相交.

2 定理的证明

证明 *存在性* 由引理 4至引理 6, H_+、H_- 均为互不相交的开集, 因而必存在 $c > 0$ 使得 $c \overline{\in} H_+ \cup H_-$, 对此 c, 根据前面讨论, 方程组(9)从 $(\theta, \frac{c}{m}\theta^m)$ 出发的轨线 Γ_c 必进入奇点 $(1,0)$. 于是问题(3)有解.

唯一性 假设问题(3)存在两个波前解 (c_1, u_1), (c_2, u_2), $c_1 > c_2$, 则方程组(9)存在相应于 c_i 从 $(\theta, \frac{c_i}{m}\theta^m)$ 出发进入奇点 $(1,0)$ 的轨线 $\Gamma_{c_i}(i = 1,2)$. 记 Γ_{c_i} 相应的方程为 $p_i = p_{c_i}(u)$, $i = 1,2$. 由于 $p_{c_1}(\theta) = \dfrac{c_1}{m}\theta^m > \dfrac{c_2}{m}\theta^m > p_{c_2}(\theta)$, 从而在 θ 附近有 $p_{c_1}(u) > p_{c_2}(u)$. 下证当 $\theta \leqslant u \leqslant 1$ 时, $p_{c_1}(u) > p_{c_2}(u)$. 若不然, 存在 W, $\theta < W \leqslant 1$, 使得 $p_{c_1}(u) > p_{c_2}(u)$, $\theta \leqslant u < W$, 而 $p_{c_1}(W) > p_{c_2}(W)$, 从而 $\dfrac{d}{du}(p_{c_1}(u) - p_{c_2}(u))|_{u=W} < 0$, 但由 (10), $\dfrac{d}{du}(p_{c_1}(u) - p_{c_2}(u))|_{u=W} = (c_1 - c_2)W^{m-1} > 0$, 矛盾. 故当 $\theta \leqslant u \leqslant 1$ 时, 总有 $p_{c_1}(u) > p_{c_2}(u)$. 特别地, $p_{c_1}(u) > p_{c_2}(1)$, 这与 $p_{c_1}(u) = p_{c_2}(1) = 0$ 矛盾.

参考文献

1 Murray J D. Mathematical Biology. Springer-Verlag, 1993.

2 Aronoson D G, Weinberger H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. Adv In Math, 1978, (30): 33~76.

3 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论. 北京: 科学出版社, 1999.

4 王明新. 非线性抛物型方程. 北京: 科学出版社, 1997.

5 Berestycki H, Nicolaenko B, Scheurer B. Travelling wave solutions to combustion models and their singular limits. SIAM J Math Anal, 1985, 16 1207~1242.

6 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京: 人民教育出版社, 1981.

(责任编辑: 黎贞崇)