DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.03.001

广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (3): 161~ 164

一类广义 Liénard型方程概周期解的存在唯一性和稳定性

On Existence, Uniqueness and Stability of Almost Periodic Solutions for a Generalized Liénard System

欧柳曼　　罗桂烈

Ou Liuman　　Luo Guilie

(广西师范大学数学与计算机科学系　桂林市育才路 3号　541004)

(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　考虑广义 Liénard型系统,应用 V函数法,在一定条件下,证明该系统存在唯一的一致渐近稳定的概周期解,并得到有关模的结论.

关键词　Liénard型系统　V函数法　概周期解　存在唯一性　稳定性

中图法分类号　O 175.13

Abstract　A generalized Liénard system is discussed. By using V-function method, we prove the existence, uniqueness and its uniformly asymptotic stability of almost periodic solutions.

Key words　Liénard system, V- function method, almost periodic solution, existence and uniqueness, stability

由于 Liénard型方程在自动控制等实际问题中有着广泛的应用,所以多年来引起了不少学者的关注,发表过不少文章,但多数是讨论其周期解的性质[1~3]等,而对于概周期解的研究尚不多见[4],本文拟考虑更一般的 Liénard型系统,应用 V函数法讨论了该系统概周期解的存在唯一性和一致渐近稳定性.本文推广了文献[5]中的结论.

1 引理

考虑方程

$$\dot{x} = f(t,x), \tag{1}$$

其中假设 $f(t,x) \in C(R \times E^n, E^n)$ 对于 $x \in R^n$ 关于 t是一致概周期的.则我们有如下结论:

引理 1[6]　若(1)式有解 $h(t)$在 $[t_0, +\infty)$上有界,且 $\overline{\{h(t): t \geqslant t_0\}} = S$,则方程(1)必有在 R上有界的解 $j(t)$,且对一切 $t \in R$,有 $j(t) \subset S$.

引理 2[7]　若(1)式中 $f(t,x)$满足 Lipschitz条件,即对 $t \in R_+$, $x, y \in S$有

$$|f(t,x) - f(t,y)| < L|x - y|,$$

又方程的解 $h(t)$是一致渐近稳定的,且对 $t \in R_+$,有 $h(t) \subset S$,则它是完全稳定的,从而是渐近稳定的.

引理 3[6]　若(1)式满足标准假设,又 $j(t)$是方程的在 R上弱一致渐近稳定的有界解,则 $\mathrm{mod}(j) \subset \mathrm{mod}(f)$.

2 主要结果及证明

考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = h(y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -f(x)j(y) - e(t)g(x) + p(t). \end{cases} \tag{2}$$

及控制方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = h(y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -Tj(y) - \dfrac{1}{2}[(a+b) + \mathrm{sign}(xy)(a-b)] \\ \qquad g(x) + \mathrm{sign}(y)M. \end{cases} \tag{3}$$

假设(2)式中各函数始终满足下列基本假设:

(H1) $e(t), p(t) \in AP(R)$, $0 < a \leqslant e(t) \leqslant b$, $|p(t)| \leqslant M$;

(H2) $f(x)$为 x的连续可微的周期函数,周期为 $2T$, $f(x) \geqslant T$对 $x \in R$;

(H3) $g(x)$ 对 $x \in (-T, T)$连续可微, $g(-x) = -g(x)$, $g'(x) \geqslant U$, $\int_0^{\pm T} g(x)dx = \infty$, $g(x)$在 R上是以 $2T$为周期的逐段连续函数;

(H4) $j'(y) > 0$且 $j(-y) = -j(y)$;

(H5) 令 $h(|y|) = |y|h(|y|)$, $h(|y|)$ 关于 $|y|$单调不减且对 $y \in R$满足 $0 < r \leqslant h'(y) \leqslant k$, $b - ar > 0$, $b - ar - 2br + ak < 0$;

2001-04-11收稿, 2001-05-25修回。

(H6) $\left(\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}\right)' \geqslant 0$, ($a,b,\lambda,\mu,r,k,M$ 均为正常数).

由于方程(2)的特征,我们只需在相柱面

$H=\{(x,y):|x|\leqslant T,|y|<+\infty\}$

上研究(2).

定理 假设(H1)~(H6)成立,对任一 $x^* \in (x_0,T)$ 和(2)式的任一解 $(x(t),y(t))$,如果 $\lambda > \frac{\int_0^{y_0}\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}dy}{x^*-x_0}$,则存在 t_0,使得对 $t\geqslant t_0$,有

$|x(t)|\leqslant L_1, |y(t)|\leqslant L_2$,

其中

$L_1 = x_c < x^* < T, L_2 = \sqrt{\varphi^2(y_0)+2b\int_0^{x_1}g(x)dx}$, $x_0 = g^{-1}\left(\frac{M}{a}\right)$, $x_1 = g^{-1}\left(\frac{M}{b}\right)$, $y_0 = \psi^{-1}\left(\frac{2bg(x^*)}{\lambda}\right)$,

而 $(x_c,0)$ 是(3)式过 (x_0,y_0) 的轨线与 x 正半轴的交点 C 的坐标.此外,若下列条件成立:

(H7) $f(x)\leqslant \lambda^*$, $|f'(x)|\leqslant c$, $g'(x)\leqslant \mu^*$,对 $|x|\leqslant L_1$ 且

$\lambda^{*2}r + b\mu^*(a\mu+1) + (a^2\mu^2 + a\mu + \lambda^2 + c(a\mu + \lambda + 1))\varphi(L_2)\leqslant a\lambda\mu$,

则(2)式有唯一概周期解 $(x(t),y(t))$,它是一致渐近稳定的,且 $\mathrm{mod}(x(t),y(t))\subset \mathrm{mod}(e(t),p(t))$.

证明 由于 $0<a<b$,从而 $0<\frac{M}{b}<\frac{M}{a}$,又 $g'(x)\geqslant \mu > 0$,所以,$0<g^{-1}\left(\frac{M}{b}\right)<g^{-1}\left(\frac{M}{a}\right)$,即 $0<x_1<x_0<T$,其中 $(x_0,0)$ 和 $(-x_0,0)$ 分别是(2)式的零等倾线 l_1 和 l_3 与正负半轴的交点,其中

l_1: $\lambda\psi(y)+bg(x)-M=0$;

l_3: $\lambda\psi(y)+bg(x)+M=0$,

(2)式在第二,第四象限中的零等倾线分别为:

l_2: $\lambda\psi(y)+ag(x)-M=0$;

l_4: $\lambda\psi(y)+ag(x)+M=0$,

l_1,l_2 过点 $\left(0,\psi^{-1}\left(\frac{M}{\lambda}\right)\right)$,$l_3,l_4$ 过点 $\left(0,-\psi^{-1}\left(\frac{M}{\lambda}\right)\right)$,并且(2)式的4条零等倾线方程和向量场关于原点对称(图1),下面我们分5步进行证明.

(a) 对 $\forall y_* > 0$,(3)式过 (x_0,y_*) 的轨线必交于 x 轴于点 $(x_*,0)$,其中 $x_0<x_*<T$.事实上,在 xy 平面的第一象限中,考虑

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\lambda\psi(y)-ag(x)+M}{\varphi(y)}.$$

即 $\varphi(y)dy=(-\lambda\psi(y)-ag(x)+M)dx$,

(3)式中由 (x_0,y_*) 出发的轨线 $(x(t),y(t))$ 满足:

$$\int_{y^*}^{y(t)}\varphi(y)dy=-\lambda\int_{x_0}^{x(t)}\psi(y(t))dx-a\int_{x_0}^{x(t)}g(x)dx+M(x(t)-x_0), \quad (4)$$

对 $y(t)>0$,$\frac{dx(t)}{dt}>0$,故 $x_*>x_0$.若 $x_*\geqslant T$,由 $g(x)$ 满足的条件知 $\int_{x_0}^{x_*}g(x)dx=\infty$,

由(4)得 $\int_{y^*}^{0}\varphi(y)dy=-\lambda\int_{x_0}^{x_*}\psi(y(t))dx-a\int_{x_0}^{x_*}g(x)dx+M(x_*-x_0)$,矛盾.

故 $x_*<T$,从而(a)得证.

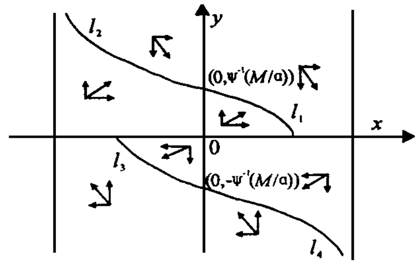

图 1 Fig. 1

(b) 对 $\forall x^*\in(x_0,T)$ 以及 $y_0>0$,只要 $\lambda(x^*-x_0)>\int_0^{y_0}\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}dy$,则(3)式由 $B(x_0,y_0)$ 出发的轨线 $(x(t),y(t))$ 交 x 轴于 $C(x_c,0)$,其中 $x_0<x_c<x^*$.

在第一象限考虑方程组

$$\dot{x}=\varphi(y),\quad \dot{y}=-\lambda\psi(y), \quad (5)$$

则(5)式过 $B(x_0,y_0)$ 的轨线方程为:

$\int_0^{y_0}\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}dy=-\lambda(x-x_0)$,

当 $\lambda(x^*-x_0)=\int_0^{y_0}\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}dy$ 时,易知(5)过 $B(x_0,y_0)$ 的轨线当 $t\to\infty$ 时趋于奇点 $(x^*,0)$,方程(3)对参数 λ 形成旋转向量场,由比较定理及旋转向量场的理论知(b)成立.

(c) (3)式过 $C(x_c,0)$ 的轨线在第四象限与 $x=x_1$ 相交于点 $D(x_1,y_1)$,除 B 点外,BCD 上所有点的纵坐标 y 满足于 $|y|<y_0$,这里 $y_0=\psi^{-1}\left(\frac{2bg(x^*)}{\lambda}\right)$.

事实上,除 B 点外 BC 上所有点的纵坐标满足 $0\leqslant y<y_0$,而由向量场的性质知(3)式过 $C(x_c,0)$ 点的轨线在第四象限与 $x=x_1$ 相交于点 $D(x_1,y_1)$.不失一般性,可设轨线先与(2)式的零等倾线 l_4 交于 $Q(\alpha,\beta)$ 之后,与直线 $x=x_0$ 相交,然后再与 $x=x_1$ 交于点 D(若不是这种情况,则轨线必没有穿过 l_4 而直接与直线 $x=x_1$ 相交于 D,这时 $|y_1|<\psi^{-1}\left(\frac{2M}{\lambda}\right)<\psi^{-1}\left(\frac{2bg(x^*)}{\lambda}\right)=y_0$)(图2).

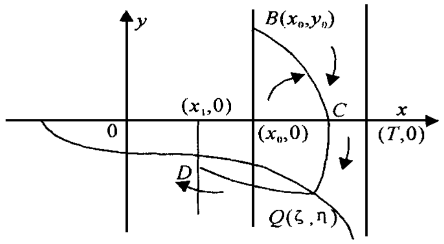

图 2 Fig. 2

显然 Q为CD的最低点,因此只须证: $|Z| < y_0$即可.在BC上:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-Tj(y) - ag(x) + M}{h(y)},$$

$$h^2(y)\frac{d^2(y)}{dx^2} = [-Tj'(y)h(y) + Th'(y)j(y) + (ag(x) - M)h'(y)]\frac{dy}{dx} - Tg'(x)h(y) =$$

$$[Tj'(y)(\frac{h(y)}{j(y)})' + (ag(x) - M)h'(y)]\frac{dy}{dx} - Tg'(x)h(y),$$

由 $x_0 < x$,有 $ag(x) - M > 0$从而 $-Tj(y) - ag(x) + M < 0$又 $h(y) > 0$所以$\frac{dy}{dx} < 0$又 $g'(x) \geq U > 0$, $h(y) > 0$及(H6)成立,有$\frac{d^2(y)}{dx^2} < 0$,即 BC是凸向上的.

在第一象限从 B到 C积分(3)式,得

$$\int_{y_0}^{0} h(y)dy = -\int_{x_0}^{x_c} Tj(y(t))dx - a\int_{x_0}^{x_c} g(x)dx + M(x_c - x_0),$$

因为 $\int_{y_0}^{0} h(y)dy = -\int_0^{y_0} h(y)dy \geq -h(y_0)y_0$,

$-\int_{x_0}^{x_c} Tj(y(t))dx - a\int_{x_0}^{x_c} g(x)dx + M(x_c - x_0) \leq (-Tj(y_0) - ag(x_0) + M)(x_c - x_0)$,

所以 $-h(y_0)y_0 < (-Tj(y_0) - ag(x_0) + M)(x_c - x_0) = -Tj(y_0)(x_c - x_0)$,

即 $h(y_0)y_0 > Tj(y_0)(x_c - x_0)$.

在第四象限,从 C到 Q积分(3)式,得

$$\int_0^{Z} h(y)dy = -\int_{x_c}^{a} Tj(y(t))dx - b\int_{x_c}^{a} g(x)dx + M(x_c - a),$$

又 $\int_0^{Z} h(y)dy \geq h(Z)Z$,

$-\int_{x_c}^{a} Tj(y(t))dx - b\int_{x_c}^{a} g(x)dx + M(x_c - a) \leq -Tj(Z)(a - x_c) - bg(x_c)(a - x_c) + M(x_c - a) = [-Tj(Z) - bg(x_c) - M](a - x_c) = [Tj(Z) + bg(x_c) + M](x_c - a) \leq [-bg(a) + bg(x_c) + M](x_c - a) \leq bg(x^*)(x_c - a)$,

所以 $h(Z)Z \leq bg(x^*)(x_c - x_0)$, 又 $Tj(y_0)y_0 = 2bg(x^*)$,

于是 $h(Z)Z \leq bg(x^*)(x_c - x_0) < Tj(y_0)(x_c - x_0) < h(y_0)y_0$.

又 $(yh(y))' > 0$,故 $|Z| < y_0$.

(d)构造对称于原点的简单闭曲线 Γ,其内部区域 K是(2)式的最终有界区域,使(2)式的任一解 $(x(t), y(t))$, ∃ t_0,使 $t \geq t_0$时有 $|x(t)| \leq L_1$, $|y(t)| \leq L_2$成立.

取弧段 BCD为Γ的一部分,由 D点纵坐标 y_1满足 $|y_1| < y_0$,可在直线 $x = x_1$上取一点 $E(x_1, -y_0)$,则 E在 D下方.现考虑经过 B和 E的 2条曲线:

$$V(x,y) = \frac{1}{2}h^2(y) + b\int_0^x g(x)dx = c_i, (i = 1, 2),$$

其中 $c_i = \frac{1}{2}h^2(y_0) + b\int_0^{x_i} g(x)dx$,它们分别交正,负半轴于点 $A(0, y_A)$和点 $F(0, y_F)$,从而得曲线 $ABCDEF$.因为

$h^2(y_A) = \frac{1}{2}h^2(y_0) + b\int_0^{x_0} g(x)dx$, $h^2(y_F) = \frac{1}{2}h^2(y_0) + b\int_0^{x_1} g(x)dx$,

所以 $h^2(y_A) - h^2(y_F) = b\int_{x_1}^{x_0} g(x)dx > 0$, $h^2(y_A) > h^2(y_F)$又 $h'(y) > 0$,

即有 $|y_F| < y_A$,

又因为

$$\frac{dV}{dt}|_{(2)} = h(y)h'(y)\dot{y} + bg(x)\dot{x} = h(y)h'(y)(-f(x)j(y) - e(t)g(x) + p(t)) + bg(x)h(y) \leq |h(y)|[-f(x)j(y)h'(y) - e(t)g(x)h'(y) + p(t)h'(y) + bg(x)]$$

$$\leq |h(y)|[-Trj(y_0) + (b - ar)g(x^*) + Mk]$$

$$\leq |h(y)|[b - ar - 2br + ak]g(x^*) < 0,$$

所以,当 $|y| > y_0$时, $\frac{dV}{dt}|_{(2)} < 0$即当 t增大时,(2)的轨线穿过弧段 AB时由上方进入下方,穿过弧段 EF时由下方进入上方.又注意到(2)和(3)两向量场之间的关系及(3)的向量场关于原点是对称的,这样可构造与原点对称的简单闭曲线 $ABCDEFA'B'C'D'E'F'A$(图 3),使得(2)的轨线当 t增大时由外向内穿过Γ进入其内部区域 K,由 $x^* \in (x_0, T)$的任意性,围绕Γ可构造有同样性质的一族闭曲线,它们充满整个区域 $H \backslash K$,从而 K为最终有界区域.

因此对(2)式的任一解 $(x(t), y(t))$都 ∃ t_0,使 $t \geq t_0$时有 $|x(t)| \leq x_c$, $|y(t)| \leq y_A$而由向量场的性

质知: $|y(t)| \leqslant |y_F|$,即 $|x(t)| \leqslant L_1, |y(t)| \leqslant L_2$.

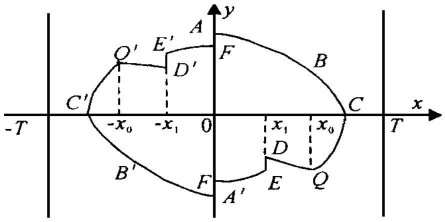

图 3 Fig. 3

(e) 证 (2) 式在 K 中有唯一解,它是一致渐近稳定的概周期解,模包含关系成立.

由 (d) 知对 $\forall t \geqslant t_0$,解 $(x(t), y(t)) \subset$ K,由引理 1 知有解 $(\overline{x(t)}, \overline{y(t)})$ 对 $\forall t \in R$ 包含在 K 中,先证 $(\overline{x(t)}, \overline{y(t)})$ 在 K 中是一致渐近稳定的.令

$$u = x - \bar{x}, v = y - \bar{y},$$

于是 (2) 式可化为:

$$\begin{cases} \dot{u} = h(v + \bar{y}) - h(\bar{y}), \\ \dot{v} = f(\bar{x}) j(\bar{y}) + e(t) g(\bar{x}) - f(u + \bar{x}) \\ \quad j(v + \bar{y}) - e(t) g(v + \bar{x}), \end{cases} \quad (6)$$

即

$$\begin{cases} \dot{u} = h'(y) v + O(\sqrt{u^2 + v^2}), \\ \dot{v} = - e(t) g'(\bar{x}) u - f(\bar{x}) j'(\bar{y}) v - \\ \quad f'(\bar{x}) j(\bar{y}) u + O(\sqrt{u^2 + v^2}). \end{cases} \quad (7)$$

(7) 式的线性部分为:

$$\begin{cases} \dot{u} = h'(y) v, \\ \dot{v} = - e(t) g'(\bar{x}) u - f(\bar{x}) j'(\bar{y}) v - \\ \quad f'(\bar{x}) j(\bar{y}) u. \end{cases} \quad (8)$$

将 (8) 式改写为:

$$\begin{cases} \dot{u} = h'(y) v, \\ \dot{v} = - a\mathrm{U} u - \mathrm{T} v - f'(\bar{x}) j(\bar{y}) u - (f(\bar{x}) \\ \quad j'(\bar{y}) - \mathrm{T}) v - (e(t) g'(\bar{x}) - \mathrm{TU}) u, \end{cases} \quad (9)$$

取 Liapunov 函数 $V(u, v) = a_{11} u^2 + 2 a_{12} uv + a_{22} v^2$,其中 $a_{11} = a^2 \mathrm{U}^2 + a\mathrm{U} + \mathrm{T}^2, a_{12} = \mathrm{T}, a_{22} = a\mathrm{U} + 1$.易知 V 是正定的,且

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9)} = (2 a_{11} u \dot{v} + 2 a_{12} u \dot{v} + 2 a_{22} v \dot{v})|_{(9)}$$

$= 2(a^2 \mathrm{U}^2 + a\mathrm{U} + \mathrm{T}^2) h'(\bar{y}) uv + 2 a_{12} h'(\bar{y}) v^2 + (2 a_{12} u + 2 a_{22} v) [a\mathrm{U} u - \mathrm{T} v - f'(\bar{x}) j(\bar{y}) u - (f(\bar{x}) j'(\bar{y}) - \mathrm{T}) v - e(t) g'(\bar{x} - a\mathrm{U}) u]$

$= - 2a\mathrm{TU}(u^2 + v^2) - (2 a_{12} u + 2 a_{22} v) [f'(\bar{x}) j(\bar{y}) u + (f(\bar{x}) j'(\bar{y}) - \mathrm{T}) v + (e(t) g'(\bar{x}) - a\mathrm{U}) u] - (2 a_{12} u + 2 a_{22} v)(1 - h'(\bar{y})) \leqslant - 2a\mathrm{TU}(u^2 + v^2) + 2 a_{12} c h(L_2) u^2 + 2 a_{12} (\bar{\mathrm{T}} r - \mathrm{T}) |uv| + 2 a_{12} c h(L_2) |uv| + 2 a_{22} (b\bar{\mathrm{U}} - a\mathrm{U}) |uv| + 2(1 + h(L_2)) a_{11} |uv| \leqslant [- 2a\mathrm{TU} + 2 a_{12} c h(L_2) + 2 a_{12} (\bar{\mathrm{T}} r - \mathrm{T}) + 2 a_{12} c h(L_2) + 2 a_{22} (b\bar{\mathrm{U}} - a\mathrm{U}) + 2(1 + h(L_2)) a_{11}](u^2 + v^2) \leqslant 2[- a\mathrm{TU} + \bar{\mathrm{T}}^2 r + b\bar{\mathrm{U}}(a\mathrm{U} + 1) + (a^2 \mathrm{U}^2 + a\mathrm{U} + \mathrm{T}^2 + c(a\mathrm{U} + \mathrm{T} + 1)) h(L_2)](u^2 + v^2)$,

所以,当 $u^2 + v^2 \neq 0$ 时,由 (H7) 知 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(9)} < 0$,从而 (9) 式的零解也即 (2) 式的解是一致渐近稳定的.

由条件知 (2) 式右端满足 Lipschitz 条件及引理 2 知 $(\overline{x(t)}, \overline{y(t)})$ 是渐近概周期解,其概周期部分 $(x(t), y(t))$ 即为 (2) 式在 K 中的概周期解,而一致渐近稳定是可以继承的,从而 $(x(t), y(t))$ 也是一致渐近稳定的.

最后证明概周期解的唯一性.这只要证 (2) 式是非常稳定的,即证 (2) 式的任两个解之差当 $t \to \infty$ 时都趋向于零.设 $(x_i(t), y_i(t))$ $(i = 1, 2)$ 是 (2) 式的任二解,由前所证知 $\exists t_0$,使得当 $t \geqslant t_0$ 时, $(x_i(t), y_i(t)) \subset$ K, $(i = 1, 2)$.令

$$u = x_1 - x_2, v = y_1 - y_2,$$

由中值定理知: $\exists q_i(t), |q_i(t)| \leqslant L \ (i = 1, 2)$,使得

$$\begin{cases} \dot{u} = h(q_2(t)) v, \\ \dot{v} = - e(t) g'(q_1(t)) u - f'(q_1(t)) j(y_2) u \\ \quad - f(x_2(t)) j'(q_2(t)) v. \end{cases} \quad (10)$$

与 (e) 类似取 Liapunov 函数 V,则在 K 中 (H7) 成立,故有 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(10)} < 0$,所以 (10) 式的解渐近稳定,从而 (2) 式的概周期解是唯一的,且由引理 3 知 $\mathrm{mod}(x(t), y(t)) \subset \mathrm{mod}(e(t), p(t))$. 定理证毕.

文献 [5] 中的定理 1, 定理 2 可作为本文结果的推论.

参考文献

1 Zhou Jin. On the nonexistence of periodic solutions for Liénard-type equation. J Sys Sci and Math Sci, 1999, 12 (2): 185~192.

2 彭世国,朱思铭.时滞 Liénard 型方程的周期解.中山大学学报, 1998, 37 (6): 22~25.

3 周 进. Liénard 型方程周期解不存在的充分条件.应用数学, 1998, 11 (1): 41~43.

4 杨喜陶.一类 Liénard 方程概周期解的存在性.广西大学学报, 1998, 23 (2): 110~114.

5 Sun Jianhua, He chongyou. Almost periodic solution for the system $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + e(t)g(x) = h(t)$. J of Nanjing Univ (Math Biguart), 1990, 192~1202.

6 Fink A M. Almost periodic different equation. Lecture Notes in Mathematic, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1974 (377).

7 Yoshizawa T 著.稳定性理论与周期解和概周期解的存在性.郑祖庥,陈纪鹏,张书年译.南宁:广西人民出版社. 1985. 144.

(责任编辑: 黎贞崇)