DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2001.02.004
广西科学 Guangxi Sciences 2001, 8 (2): 90~ 92

多项式理想计算的神经网络方法

Neural Network Approach to Polynomial Ideal Computation

周永权
Zhou Yongquan

(广西民族学院数学与计算机科学系 南宁市西乡塘 530006)
(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 提出一种用于多项式理想计算的理想同余神经元,其工作方式既不同于过去感知器输入加阈值的激活方式,也不同于通常意义下激活函数选取,且保持神经元的运算特性. 以 Grobner基计算为例,给出利用该神经元计算 Grobner基神经网络描述性学习算法.
关键词 理想同余神经元 多项式理论 Grobner基 描述性学习算法
中图法分类号 TP 181; TP 183

Abstract The concept of polynomial ideal congruent neuron are proposed. It is different from both general perception and chosen stimulate function in working way, and is still characterized massively parallel architecture of the polynomial ideal computation. The polynomial ideal congruent neural network learning algorithm is discussed with an application of this neuron to computation of Grobner base.
Key words indeal congruent neuron, polynomial theory, Grobner base, polynomial ideal learning algorithms

迄今在前馈型神经网络结构中,人们所采用的都是激活函数按非线性特性工作的神经元,即输入和加阈值的激活方式,为了改进神经元的工作特性,不少作者提出各种类型的神经元, 如: 形式化神经元[1] (FAN), 广义同余神经元[2] (GCN), 代数神经元[3] (AN)等,本文提出理想同余神经元记为 ICN, 用于如何解决多项式环 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$上的理想计算.

多项式理想计算是计算机代数中重要内容,有着广泛的应用范围,如: Grobner基理论[4], Wu方法[5],自动推理计算与定理机器证明等方面取得巨大成功,然而随着应用的不断深入和扩大,对运算速度的要求愈来愈高,需要寻求更快速的多项式理想计算系统结构来适合多维理想计算情形. 而人工神经网络方法,具有大规模并行处理,分布信息存储,良好自适应性和自组织性以及一定的联想学习和容错能力,使用人工神经网络方法来实现多项式理想计算,可充分发挥它们各自优势. 为此, 本文试图用神经网络的自适应性来实现多项式环上理想计算.

2000-09-28收稿, 2000-12-28修回。

1 理想同余神经元和理想同余神经网络的定义

定义 1 设 $f,g,h\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$且 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$,其中 $f_i\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, Ideal($F$)表示 F产生的理想,则称 g就模 F理想同余于 h,并记为:

$$g\equiv h \quad (\mathrm{Imod}F), \tag{1}$$

(1)式意味着存在 $f\in F,b,u\in K$或 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$,使得: $g-h=b\cdot u\cdot f$成立.

定义 2 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$和 $W=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}\in K$($K$为域),为人工神经元的输入和连接权值向量,如输出按 $f\in F$的理想同余方式运算,即

$$g\equiv\sum_{i=1}^{n}w_ix_i \quad (\mathrm{Imod}F) \tag{2}$$

写成多项式形式

$$g\equiv h \quad (\mathrm{Imod}F),$$

称该神经元为理想同余神经元 (见图 1).

从定义可知,理想同余神经元工作方式既不同于

过去感知器输入加阈值的激活方式,也不同于通常意义下激活函数选取,只要我们对模 F调整,就可实现对理想神经元学习,最终可得到该神经元的输出.

定义 **3** 由理想同余神经元构成的人工神经网络称为理想同余神经网络. 记为: ICNN.

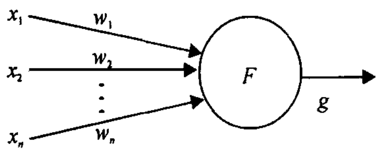

图 1 理想同余神经元 (ICN)

Fig. 1 Ideal congruent neuron

例 **1** 现考虑理想同余神经元一般形式 (见图 2),其中 $g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 为非线性项,那么该神经元输出为:

$$g \equiv \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \sum_{j=1}^{m} w_{n+j} g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n) \quad (\mathrm{lmod} F), \qquad (3)$$

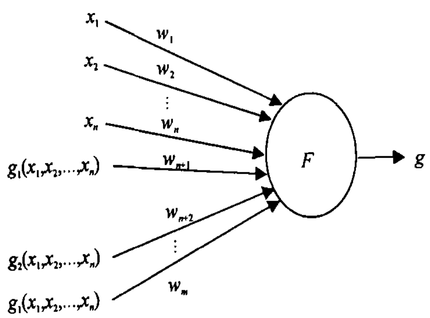

图 2 一般多项式理想同余神经元

Fig. 2 Generalized polynomial ideal congruent neuron

由此可看出,图 1所定义神经元是图 2特例,尽管这个输出非线性项,但可经变量替换使其形式上线性化,令 $z_i = x_i,\ i=1,2,\cdots,n$,

$z_j = g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n), j=n+1, n+2,\cdots,n+m$,

于是上面输出多项式函数可化为

$$g \equiv \sum_{j=1}^{n+m} w_j z_j \quad (\mathrm{lmod} F), \qquad (4)$$

便回到人们习惯采用的线性形式.

例 **2** 在例 1中,若取理想 $F=\{x_1^2+x_2^2+1\}$(如图 3所示).

这时该网络的输出为:

$$g(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 1 \qquad (5)$$

作 45°坐标旋转,新坐标为 x_1', x_2',则二次曲线 $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$变为双曲线标准式 $\frac{(x_1' - \sqrt{2}/2)^2}{(\sqrt{2}/2)^2} + \frac{(x_2')^2}{(\sqrt{2}/2)^2} = 1$,将二组输入模式 $\{(0,0),(1,1)\}$,$\{(1,0),(0,1)\}$分成两类,即 0-类与 1-类,从而说明可利用理想神经元实现了异或运算.

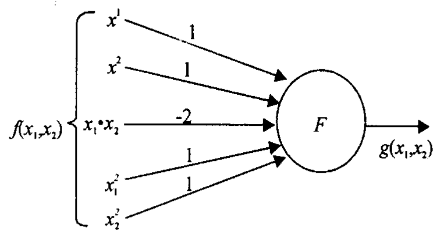

图 3 实现异或函数运算理想神经元

Fig. 3 XOR problem accomplished by ideal congruent neuron

2 Grobner基计算的神经网络方法

Grobner基理论是计算机代数中的重要内容,有广泛的应用范围[4],国外众多学者利用这个理论解决了很多理论问题,如: 非线性代数方程组求解与定理证明等,下面以 Grobner为例,说明如何将多项式理想神经元用于 Grobner基计算.

例 **3** 考虑 $F=\{f_1,f_2,f_3\}$,其中

$f_1 = 3x^2y + 2xy + y + 9x^2 + 5x - 3$,

$f_2 = 2x^3y - xy - y + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 3$,

$f_3 = x^3y + x^2y + 3x^3 + 2x^2$.

确定由理想构成 Grobner基,首先根据 $f_i(i=1,2,3)$ 次数最高项,x^3y为 4次,由 f_i 所有项构作单项式集 $\{x^3y, x^2y, xy, x^3, x^2, x, y,$ 常数项$\}$来构作多项式一般式:

$f(x,y) = a_8x^3y + a_7x^2y + a_6xy + a_5x^3 + a_4x^2 + a_3x + a_2y + a_1$,

则 f 对应的多项式理想神经元为 (见图 4):

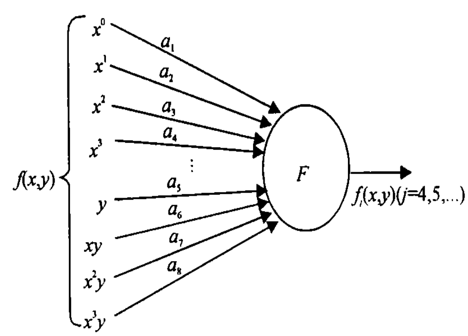

图 4 Grobner基计算的神经元模型示例

Fig. 4 Model example of neuron computation of Grobner base

其学习步骤如下:

步骤 1: 首先取模 $F := f_2$,置 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\} = (-3,5,9,0,1,2,3,0)$,可得到 f_1,依

次调整模 F 为 $F:=2xf_1-3F;F:=3F-4f_1;f_4:=\frac{1}{7}F$ 可得到该神经元输出:

$$f_4=xy+\frac{5}{7}y+\frac{12}{7}x^2-\frac{11}{7}x-\frac{15}{7};$$

步骤 2 取模 $F:=f_4$,输入向量仍为 f_1,依次调整模 F 为: $F:=f_4,F:=21xF-7f_1,F:=F-f_4$, $f_5:=F$,此时该神经元输出:

$$f_5:=y-\frac{14}{3}x^3+\frac{38}{3}x^2+\frac{61}{6}x-3;$$

步骤 3 置 $F=f_5$,调整权值: $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}=\{-\frac{15}{7},-\frac{11}{7},\frac{12}{7},0,\frac{5}{7},1,0,0\}$ 同样可得到 f_6,则该神经元输出为:

$$f_6:=x^4-2x^3-\frac{15}{4}x^2-\frac{5}{4}x;$$

步骤 4 置 $F=f_3$,调整权向量上 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}=\{-3,5,9,0,1,2,3,0\}$ 可得到 f_1,同样的方法可得该神经元输出:

$$f_7:=x^3-\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}x.$$

此时,根据 Grobner基理论知由 F 产生 Grobner基为:

$$G:=\{f_1,f_2,\cdots,f_7\}.$$

下面考虑一般情形,以 Grobner基计算为例,给出利用多项理想神经元解决一般理想计算神经网络方法及步骤,问题是给定多项式集 F,如何通过理想同余神经元计算出多项式集 G,使得 $\mathrm{Ideal}(F)=\mathrm{Ideal}(G)$,且是 Grobner基. 首先给出 Grobner基的神经网络定义.

定义 4 称 G 是 Grobner基,在理想同余神经元模型下,若对所有 $f,g\in G$,有: $f\equiv g(\mathrm{Imod}F)$,即 f 模 $\mathrm{Ideal}(G)$ 同余于 g.

以上定义,我们给出多项式理想同余神经元计算 Grobner基的描述性算法:

设 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_r\},f_i\in K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$,求多项式集 G,使 $\mathrm{Ideal}(F)=\mathrm{Ideal}(G)$,且 G 是 Grobner基,由于每一多元多项式都可归结到二元多项式情形,不妨考虑二元多项式理想的情形.

步骤 1 置 $T=\{x^{i_1}y^{i_2}|i_1,i_2\in N\}$ 是 F 上的所有候选单项式集,在 T 上定义一字典序:

$$1<_T x<_T x^2<_T x^3<\cdots<y<_T xy<_T x^2y<\cdots<_T y^2<_T xy^2<\cdots;$$

步骤 2 据步骤 1单项式集 T 及 T 上字典序,构作 F 上一般多项式表达式:

$$f\equiv a_{00}+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{30}x^3+\cdots+b_{10}y+b_{11}xy+b_{12}xy^2+\cdots+a_{02}y^2+c_{12}xy^2+\cdots;$$

步骤 3 以 T 上单项式作为理想同余神经元输入向量,f 的系数作为权值,通过对模 F 调整来实现学习,使 $f\equiv f_i\in F(i=1,2,\cdots,r)$,置模 G 分别为 $f_j(j\neq i)$,利用多项式的伪除法,则该神经元输出为 $f_K(K=r+1,r+2,\cdots)$;

步骤 4 置 $G=F\cup\{f_k|K=r+1,r+2,\cdots,n)$,则 G 为所求 Grobner基.

实际上,在步骤 3中,实现使一个多项式变换到另一个多项式,实际对权值经平移变换易于实现.

3 结语

文中给出理想同余神经元,其工作方式既不同于过去感知器输入加阈值的激活方式,也不同于通常意义的激活函数 (如 sigmoid函数等) 选取,它保持神经元的运算特性,也可用于解决异或分类问题,实例证明,只要给出利用多项式理想同余神经元计算 Grobner基神经网络学习描述性算法,仅需通过对模调整来实现学习,即可完成对 Grobner基的计算,这为 Grobner基计算提供了一几何背景. 本文仅是对多项式同余神经元及神经网络的研究提供一可视化手段,有关学习算法的细化及实现和应用问题便是今后所要做的工作.

参考文献

1 陈维荣,钱清泉. 一种形式神经元的统一模型. 见: 中国神经科学大会论文集 (1997年),北京: 人民邮电出版社,1997. 78~81.

2 靳蕃编著. 神经计算智能基础·原理·方法. 成都: 西南交通大学出版社,2000. 167~173.

3 周永权. 前向代数神经网络的函数逼近理论及学习算法. 计算机研究与发展,2000,(3): 264~271.

4 Buchberger B. Grobner bases an algrorithmic method in polynomial ideal theory. In: Boes N K et al.. Multidimensional systems theory. Dordrecht: Reidel,1985. 182~232.

5 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理. 北京: 科学出版社,1984.

6 杨 路,张景中,候晓荣著. 非线性代数方程组与定理机器证明. 上海: 上海科技教育出版社,1996. 16~17.

(责任编辑: 黎贞崇)