

三角单元部分电导率分块连续变化 点源二维电场有限元数值模拟*

2-D Electrical Modeling Due to a Current Point by FEM with Variation of Conductivity within Each Triangular Element

阮百尧

Ruan Baiyao

(桂林工学院资源与环境工程系 桂林市建干路 12号 541004)

(Dept. of Resources and Environment Engi., Guilin Institute of Technology, 12 Jangnanlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 为了易于模拟地形和地电体,有限单元被设计为三角单元.考虑到实际中岩石、矿物的物性参数均是变化的,单元内电导率被设计为双线性变化.导出一种点源二维地电断面电位计算的有限元方法.该法首先给出沿走向方向进行傅氏变换后的电位的变分问题,然后用有限元方法进行数值计算,最后通过傅氏反变换,求得空间域电场.

关键词 点源二维电场 有限元方法 电导率分块连续

中图法分类号 P 319.2; O 242.21

Abstract To model arbitrarily shaped two-dimensional topography and structures, triangular element grid was used in the finite element method (FEM). Since the field conductivity varies everywhere, the conductivity is designed to change bilinearly within each triangular element in our method, which is developed for modeling two-dimensional electrical field due to a current point. In this method, the variation equation of electrical potential transformed by Fourier cosine is released firstly, then this variation equation is solved by FEM and Fourier inverse transform.

Key words two dimensional electric modeling due to a current point, finite element method, conductivity changing within each triangular element

阮百尧 徐世浙^[1] 1998年曾给出一种电导率参数分块双线性变化二维地电断面电阻率测深曲线计算的有限元方法.该文虽然在有限单元中电导率分布上克服了前人均匀分布的缺陷^[2,3],但由于有限单元采用的是矩形单元,在模拟地形和地电体时往往精度不高.因此,本文在此基础上,导出了三角单元剖分电导率分块连续变化(双线性插值)点源二维电场的有限元数值模拟方法.

1 波数域点源二维电场的变分问题

点源二维电位的正演计算,一般通过沿走向 y 方向傅氏变换转换至波数域中进行^[4].其电位 U 所对

应的变分问题为:

$$\begin{cases} F(U) = \frac{1}{2} \int_K \{ e [(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial U}{\partial z})^2 + k^2 U^2] \\ - 2W(x_A)W(z_A)U \} dK + \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\infty} \frac{k e K_1(kr_A) \cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)} U^2 d\Gamma, \\ WF(U) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

上式中,区域 K 边界 Γ_∞ 参见图 1, e 为介质的电导率, n 是 K 的外法向, r_A 是电源点 (x_A, z_A) 至积分点的距离, k 是傅氏变换波数, K_0, K_1 为零阶一阶第二类修正贝塞尔函数.对若干个 k ,用有限元法解变分问题(1)求出波数域中点电源总电位 U ,用傅氏反变换,可以求出主剖面上的三维空间中的总电位 u .傅氏反变换的公式是:

$$u(M) = \sum_{k=1}^5 g_i U(M, k_i), \quad (2)$$

2000-08-11收稿

* 高等学校骨干教师资助计划项目、广西自然科学基金项目(桂科自0007024)、广西培养新世纪学术和技术带头人专项资金资助项目部分研究成果

其中 M 代表点的位置, k_i 是波数, g_i 是加权系数. 具体系数^[4]见表 1.

表 1 傅氏反变换的 k_i 和 g_i

Table 1 k_i and g_i parameters of Fourier inverse transform

	k_i	g_i		k_i	g_i
1	0.002 68	0.005 65	4	0.339 91	0.274 09
2	0.024 19	0.024 06	5	1.260 51	1.095 90
3	0.096 21	0.078 49			

2 有限元法

将积分区域剖分成许多三角单元, 总节点数为 N (图 1), 则 (1) 式中对区域 K 和边界 Γ_∞ 的积分可分界为对各三角单元 Δ 和 Γ_Δ 的积分之和.

$$F(U) = -\frac{1}{2} \sum_K \int_{\Delta} \{ e [(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial U}{\partial z})^2 + k^2 U^2] - 2W(x_A)W(z_A)U \} dK + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_\infty} \int_{\Gamma_\Delta} \frac{k^e K_1(kr_A) \cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)} U^2 d\Gamma. \quad (3)$$

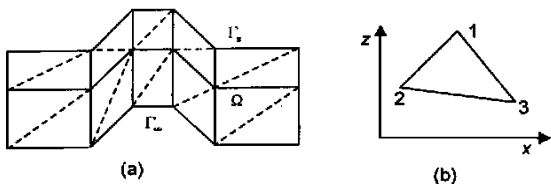


图 1 区域 K 有限元网格部分 (a) 及三角单元 (b) 示意图
Fig. 1 2D model geometry K including the finite element grid (a) and triangular element (b)

假设三角单元内转换电位 U 和电导率 e 线性变化, 即在每个三角单元

$$\begin{cases} U = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 = N^T U_\Delta, \\ e = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 = \sum_{i=1}^3 N_i e_i, \end{cases} \quad (4)$$

这里, 下标 1 2 和 3 是三角单元的三角节点号 (图 1b); $\sigma = (e_1, e_2, e_3)^T$ 是节点上的电导率; $U = (U_1, U_2, U_3)^T$ 则是三角单元节点上的波数域电位; $N = (N_1, N_2, N_3)^T$, $N_i = \frac{1}{2\Delta} (ax + bz + a)$ 是 x 和 z 的线性函数 ($i = 1, 2, 3$), 其中 $\Delta = (a_1 b_2 - a_2 b_1)$ 是三角单元的面积,

$$\begin{aligned} a_1 &= z_2 - z_3, a_2 = z_3 - z_1, a_3 = z_1 - z_2, \\ b_1 &= x_3 - x_2, b_2 = x_1 - x_3, b_3 = x_2 - x_1, \\ c_1 &= x_2 z_3 - x_3 z_2, c_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3, \\ c_3 &= x_1 z_2 - x_2 z_1, \end{aligned}$$

(x_1, z_1) , (x_2, z_2) 和 (x_3, z_3) 是三角单元三角节点 x 和 z 坐标. 这样, (3) 式中三角单元中的面积分

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \{ e [(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial U}{\partial z})^2 + k^2 U^2] - 2W(x)W(z)U \} dx dz \\ &= \frac{1}{2} U_\Delta^T \iint_{\Delta} \sum_{i=1}^3 (N_i e_i) [(\frac{\partial N}{\partial x}) (\frac{\partial N^T}{\partial x}) + (\frac{\partial N}{\partial z}) (\frac{\partial N^T}{\partial z}) + k^2 N N^T] dx dz U_\Delta - U_\Delta^T \iint_{\Delta} [W(x_A)W(z_A)N dx dz] = \\ & \frac{1}{2} U_\Delta^T \left[\frac{1}{4\Delta} \sum_{i=1}^3 (e_i \iint_{\Delta} N_i dx dz) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \right] \\ & \times U_\Delta + \frac{1}{2} U_\Delta^T [k \sum_{i=1}^3 (e_i \iint_{\Delta} N_i N N^T dx dz)] U_\Delta - \\ & U_\Delta^T \iint_{\Delta} W(x)W(z)N dx dz, \end{aligned} \quad (5)$$

由文献 [5]

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} N_i dx dz &= \frac{\Delta}{3}, \\ \iint_{\Delta} N_i^a N_j^b N_k^c dx dz &= \frac{2a! b! c!}{(a+b+c+2)!} \Delta, \end{aligned} \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 求得三角单元上积分为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \{ e [(\frac{\partial U}{\partial x})^2 + (\frac{\partial U}{\partial z})^2 + k^2 U^2] - 2W(x_A)W(z_A)U \} dx dz \\ &= \frac{1}{2} U_\Delta^T (K_{\Delta 1} + K_{\Delta 2}) U_\Delta - U_\Delta^T S_\Delta, \end{aligned} \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} K_{\Delta 1} &= \frac{e_1 + e_2 + e_3}{12\Delta} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \\ K_{\Delta 2} &= \frac{k^2 \Delta}{60} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$S_\Delta = I(W_A, W_A, W_A)^T$, 其中

$$\begin{aligned} c_{11} &= (6, 2, 2)^e, c_{12} = (2, 2, 1)^e, c_{13} = (2, 1, 2)^e, \\ c_{21} &= (2, 2, 1)^e, c_{22} = (2, 6, 2)^e, c_{23} = (1, 2, 2)^e, \\ c_{31} &= (2, 1, 2)^e, c_{32} = (1, 2, 2)^e, c_{33} = (2, 2, 6)^e, \end{aligned}$$

W_A 当 i 与电流源节点 A 重合时等于 1, 不重合等于 0.

(3) 式中边界 Γ_Δ 单元的线积分, 可假设三角单元 Δ 的 12 边落在 Γ_Δ 上, 由于无穷远边界离电源较远, 可将 $\frac{k^e K_1(kr_A) \cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)}$ 看作常数 C , 提至积分号之外, 因此积分

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{12} \frac{k^e K_1(kr_A) \cos(r_A, n)}{K_0(kr_A)} U^2 d\Gamma = \frac{C}{2} \int_{12} e U^2 d\Gamma = \\ & \frac{1}{2} U_\Delta^T K_{\Delta 3} U_\Delta, \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} K_{\Delta 3} &= (k_{ij}), i, j = 1, 2, 3, \\ k_{ij} &= \oint_{12} \sum_{i=1}^3 (N_i e_i) N_i N_j d\Gamma = C I_{ij} / 12, \end{aligned}$$

这里 l_{12} 是边界单元 \triangle 的 12 边边长, 而

$$\theta_{11} = 3\epsilon_1 + \epsilon_2, \theta_{12} = \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

$$\theta_{21} = \epsilon_1 + \epsilon_2, \theta_{22} = \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

其余 $\theta_{ij} = 0$.

对所有三角单元求和, 即得到泛函 $F(U)$ 的数值表达式

$$F(U) = \frac{1}{2} U^T K U - U^T S, \quad (9)$$

式中 K 是由全部三角单元和边界单元的 $(K_{\Delta_1} + K_{\Delta_2} + K_{\Delta_3})$ 相加组成的 $N \times N$ 阶对称带宽矩阵, U 是由所有 N 个三角网格节点上的转换电位组成的列矢量, S 则是由 S_{Δ} 相加组成的与源有关的列矢量. (9) 式泛函 $F(U)$ 对 U 求变分, 并令其为零, 就得到了求波数域中各节点上电位的线性方程组

$$K U = S. \quad (10)$$

3 算例

3.1 水平层状地电断面

Mallik 等^[6]曾用解析法计算过下面电导率随深度分段线性变化的一维剖面的电测深曲线: 顶层电阻率 $d_1 = 50 \Omega \text{ m}$, 底层电阻率 $d_2 = 100 \Omega \text{ m}$, 中间层电阻率按电导率线性变化规律从 d_1 变到 d_2 , 厚度为顶层的 5 倍. 图 2 曲线 1 就是用解析法所得测深曲线, 曲线 2 为用本文提出的有限元法所得的测深曲线, 可见除首支 2 个点由于电源点影响外其余各点两者拟合的很好.

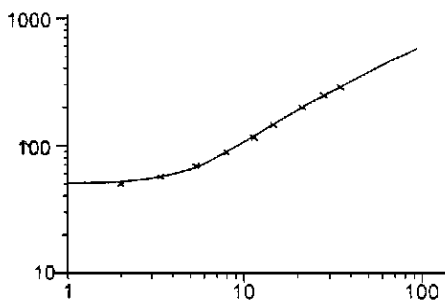


图 2 有限元法与解析法结果对比

Fig. 2 Comparison of analytical and FEM numerical solutions
— 解析法 Analytical, × 有限元法 FEM.

3.2 山谷地形下棱柱体

本例的真模型为山谷地形下含有 2 个电导率不同的棱柱体 (图 3a), 其中 a 柱体的四周电阻率为 $100 \Omega \text{ m}$, b 柱体的四周电阻率为 $10 \Omega \text{ m}$, 围岩的电阻

率为 $50 \Omega \text{ m}$. 地形还有局部起伏. 图 3b 为用有限元法数值模拟得到的偶极-偶极装置视电阻率测深拟断面等值线图.

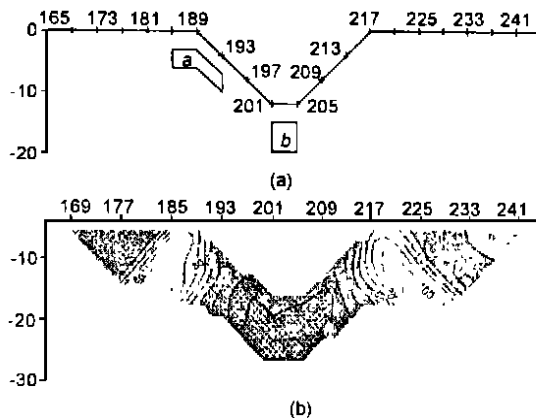


图 3 山谷地形下棱柱体偶极-偶极装置视电阻率拟断面
Fig. 3 Pseudo-section of apparent resistivity on dipole-dipole array

(a) model (a $100 \Omega \text{ m}$, b $10 \Omega \text{ m}$, background $50 \Omega \text{ m}$),
(b) pseudo section.

参考文献

- 1 阮百尧, 徐世浙. 电导率分块线性变化二维地电断面电阻率测深有限元数值模拟. 地球科学, 1998, 23: 303~307.
- 2 Coggon J H. Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. Geophysics, 1971, 36: 132~155.
- 3 Dey A, Morrison H F. Resistivity modeling for arbitrarily shaped two dimensional structures. Geophysical Prospecting, 1979, 27.
- 4 徐世浙. 点电源二维电场问题中傅氏变换的波数 k 的选择. 物探化探计算技术, 1988, 10: 235~239.
- 5 Zienkiewicz O C, Taylor R L. The finite element method, volume, basic formulation and line problems, Mcgraw-hill international editions. Mathematics Series, 1988, 128~132.
- 6 Mallick K, Janin S C. Resistivity soundline on a layered transitional earth. Geophysical Prospecting, 1979, 27: 869~875.
- 7 罗延钟, 张桂青著. 电子计算机在电法勘探中的应用. 武汉: 武汉地质学院出版社, 1978. 67~95.
- 8 徐世浙著. 地球物理中的有限单元法. 北京: 科学出版社, 1994. 183~194.
- 9 徐世浙, 于涛, 李予国等. 电导率分块连续变化的二维 MT 有限元模拟 (I). 高校地质学报, 1995, 1: 65~73.

(责任编辑: 黎贞崇)