DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.04.007

广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (4): 260~261, 269

随机加工时间的单机调度问题*

Single Machine Scheduling with Random Processing Time

兰继斌　　　王中兴

Lan Jibin　　Wang Zhongxing

(广西大学数学与信息科学系　南宁市西乡塘路　530004)

(Dept. of Math. & Info., Guangxi Univ., Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要　讨论 n 个独立工件在一台机器上加工。工件的加工时间服从正态分布,所有工件交货期设置公共交货期。目标是确定公共交货期及工件的最优排序,使工件完工时间与公共交货期之差绝对值之和及工件完工时间之和的线性组合的期望值最小.

关键词　工件加工　单机调度　正态分布　公共交货期

中图法分类号　O 211.6

Abstract　The sequencing of n independent work pieces which are processed in a single-machine shop is discussed in which each job is assigned a common due-date k and each work piece processing time distribution is assumed to be independent normal distribution. The object is to determine a common due-date k^* and to find an optimal sequence of n independent work pieces to minimize the expectation of the linear combination of total absolute deviation of completion time about a common due date and total completion time.

Key words　work pieces process, single machine scheduling, normal distribution, common due date

现代准时生产要求工件准时加工,按期交货.然而在实际生产过程中,由于受各方面因素的影响,工件加工时间的不确定性,往往会出现偏差,如何更好地组织生产,使偏差造成的生产者的损失最小,是理论工作者和生产管理者面临的一个非常重要的课题.

近年来,人们对涉及交货期的调度问题进行了广泛的研究,取得很多科研成果[1,2],然而大多数成果是在静态环境下取得的,涉及随机调度的文章不多,文献 [3] 讨论在 TWK 交货期设置下总平方差最小问题,文献 [4] 讨论在加工时间服从泊松分布的工件平均完工时间与工件完工时间差的绝对值之和及工件完工时间之和的线性组合最小问题.本文讨论 n 个独立工件在一台机器上加工,工件的加工时间服从正态分布,工件的交货期设置为公共交货期的工件完工时间与公共交货期之差绝对值之和及工件完工时间之和的线性组合的期望值最小问题.

1　问题描述

设 n 个独立工件组成的集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$,其中每一工件都需要在同一机器上加工.工件的加工时间 $p_i\ (i\in A)$ 相互独立且服从正态分布,即 $p_i\sim N(\mu_i,\sigma^2)$,其中 $\mu_i\geqslant 0$, σ 是工件加工时间的标准差,工件的公共交货期 k 为待定常数,假设工件到达时间为零,机器不能同时加工 2 个或 2 个以上工件,且只要还有工件等待加工,不允许机器空闲;工件加工过程中无人为中断.设 $S=([1],[2],\cdots,[n])$ 为 n 个独立工件的一个排序,则工件 $[i]$ 的完工时间 $C_{[i]}=\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}$.本文的目标是确定待定常数 k^* 及工件的一个排序 S^* 使得

$$E(T(S,k))=E\Big(\lambda\sum_{i=1}^{n}C_{[i]}+\mu\sum_{i=1}^{n}|C_{[i]}-k|\Big)\qquad(1)$$

最小,其中 λ, μ 为非负实数,由决策者给定.

2　结果

引理 1　对工件排序 S,设 $C_{[i]}$ 是工件 $[i]$ 完工时间,则 $C_{[i]}\sim N\big(\sum_{j=1}^{i}\mu_{[j]},\ i\sigma^2\big)$.

证明　因为 $p_{[i]}\sim N(\mu_{[i]},\sigma^2)$, $i\in A$,且 $p_{[i]}\ (i\in A)$ 彼此独立,所以 $C_{[i]}=\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}\sim N\big(\sum_{j=1}^{i}\mu_{[j]},\ i\sigma^2\big)$.

记 $f_i(x,\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi i}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2i\sigma^2}}$,

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$,则

2000-01-17收稿, 2000-05-09修回。

* 广西区教育厅资助 (No. 1999[383])。

$$E(T(S,K)) = E(T\sum_{i=1}^{n} C_{[i]} + U\sum_{i=1}^{n} |C_{[i]} - k|) = T\sum_{i=1}^{n} E(C_{[i]}) + U\sum_{i=1}^{n} E(C_{[i]}) + Unk - 2U\sum_{i=1}^{n} E[\min\{C_{[i]},k\}] = (T+U)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\_{[j]} + Unk - 2U\sum_{i=1}^{n}(\int_{-\infty}^{k} x f_i(x,\sum_{j=1}^{i}\_{[j]})\mathrm{d}x + \int_{k}^{+\infty} k f_i(x,\sum_{j=1}^{i}\_{[j]})\mathrm{d}x) = (T-U)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\_{[j]} + Unk + 2U\sum_{i=1}^{n}\int_{k}^{+\infty}(x-k)f_i(x,\sum_{j=1}^{i}\_{[j]})\mathrm{d}x, \qquad (2)$$

令 $$\frac{\mathrm{d}E(T(S,k))}{\mathrm{d}k} = nU - 2U\sum_{i=1}^{n}\int_{k}^{+\infty} f_i(x,\sum_{j=1}^{i}\_{[j]})\mathrm{d}x = nU - 2U\sum_{i=1}^{n}(1-\int_{-\infty}^{k} f_i(x,\sum_{j=1}^{i}\_{[j]})\mathrm{d}x) = 2U\sum_{i=1}^{n} H(\frac{k-\_{[i]}}{\sqrt{i}\,e}) - nU = 0, \qquad (3)$$

解得 k_S^*,因

$$\frac{\mathrm{d}^2E(T(S,k_S^*))}{\mathrm{d}k^2} = 2U\sum_{i=1}^{n} f_i(k_S^*,\sum_{j=1}^{i}\_{[j]}) \geqslant 0, \qquad (4)$$

故对固定的工件排序 S,k_S^* 能使 $E(T(S,k))$ 达到最小值.当 $U>0$时,对于每一工件排序 S,有唯一的 k_S^* 与 S对应.

考虑函数: $h_i(\_,k) = (T-U)\_ + 2U\int_{k}^{+\infty}(x-k)f_i(x,\_)\mathrm{d}x \quad (i\in A)$,

$$\frac{\partial h_i(\_,k)}{\partial \_} = (T-U) + 2U\int_{k}^{+\infty}(x-k)\frac{\partial f_i(x,k)}{\partial \_}\mathrm{d}x = (T-U) + 2U\int_{k}^{+\infty} f_i(x,\_)\mathrm{d}x = (T-U) + 2U(1 - H(\frac{k-\_}{\sqrt{i}\,e})) = (T+U) - 2UH(\frac{k-\_}{\sqrt{i}\,e}), \qquad (5)$$

当 $T\geqslant U$时,$\frac{\partial h_i(\_,k)}{\partial \_}\geqslant 0$;当 $U>T$时,设$_{0i}(k)$是$\frac{\partial h_i(_,k)}{\partial _} = 0$的解,则当 $_ < _{0i}(k)$时,$h_i(_)$关于 $\_$ 是减函数,当 $_ \geqslant _{0i}(k)$时,$h_i(_)$关于 $\_$ 是非降函数.

推论 1 若 $T\geqslant U$,则使 $E(T(S,k))$最小工件最优排序是 S^* 依$_{[i]^*}$满足$_{[1]^*}\leqslant _{[2]^*}\leqslant\cdots\leqslant _{[n]^*}$.

证明 设 $S^* = ([1],[2],\cdots,[n])$,若 S中的$_{[i]^*}$不满足$_{[1]^*}\leqslant_{[2]^*}\leqslant\cdots\leqslant_{[n]^*}$,则 S中存在相邻的工件 $[i],[i+1]$,使得$_{[i]}>_{[i+1]}$.现交换 S中工件 $[i],[i+1]$的位置,其余工件位置不变,得新工件排序 S_1,$E(T(S,k)) - E(T(S_1,k)) = h_i(\sum_{j=1}^{i}\_{[j]}) - h_i(\sum_{j=1}^{i-1}\_{[j]} + \_{[i+1]})$,由 $h_i(_)$的性质,$E(T(S,k)) - E(T(S_1,k))\geqslant 0$,这说明不是依$_{[1]}\leqslant_{[2]}\leqslant\cdots\leqslant_{[n]}$的工件排序,均可以通过调整得到改进.推论 1成立.

定理 1 设 $U>T$,$S^* = ([1]^*,[2]^*,\cdots,[n]^*)$是使 $E(T(S,k))$最小的工件最优排序,其中 k是$\frac{\mathrm{d}E(T(S^*,k))}{\mathrm{d}k} = 0$的解,则 S^* 依$_{[i]^*}$具有 V型特征(即$_{[l]^*} = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{_{[i]^*}\}$,在工件 $[l]^*$ 前的工件按非增排列,在工件 $[l]^*$ 后的工件按非降排列).

证明 由前面的讨论,知$\frac{\mathrm{d}E(T(S^*,k))}{\mathrm{d}k} = 0$的解 k唯一,若 S^* 不具有 V型特征,则在 S^* 中存在 3个相邻的工件 $[i]^*$,$[i+1]^*$,$[i+2]^*$,使得$_{[i]^*} < _{[i+1]^*}$,$_{[i+1]^*} > _{[i+2]^*}$,考虑工件排序,$S_1 = ([1]^*,[2]^*,\cdots,[i-1]^*,[i+1]^*,[i]^*,[i+2]^*,\cdots,[n]^*)$,$S_2 = ([1]^*,[2]^*,\cdots,[i]^*,[i+2]^*,[i+1]^*,\cdots,[n]^*)$,记 $m_1 = \sum_{j=1}^{i}\_{[j]^*}$,$m_2 = \sum_{j=1}^{i-1}\_{[j]^*} + \_{[i+1]^*}$,$m_3 = \sum_{j=1}^{i}\_{[j]^*} + \_{[i+2]^*}$,$m_4 = \sum_{j=1}^{i}\_{[j]^*} + \_{[i+1]^*}$,因 S^* 是最优排序,由(2)式有:

$$E(T(S^*,k)) - E(T(S_1,k)) = (T-U)(m_1-m_2) + 2U\{\int_{k}^{+\infty}(x-k)f_i(x,m_1)\mathrm{d}x - \int_{k}^{+\infty}(x-k)f_i(x,m_2)\mathrm{d}x\} = (T-U)(m_1-m_2) + 2U\{\int_{\frac{k-m_1}{\sqrt{i}e}}^{+\infty}\frac{(\sqrt{i}\,et+m_1-k)}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t - \int_{\frac{k-m_2}{\sqrt{i}e}}^{+\infty}\frac{(\sqrt{i}\,et+m_2-k)}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\} = (T-U)(m_1-m_2) + 2U\int_{\frac{k-m_1}{\sqrt{i}e}}^{+\infty}\frac{(m_1-m_2)}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t - 2U\int_{\frac{k-m_2}{\sqrt{i}e}}^{\frac{k-m_1}{\sqrt{i}e}}\frac{(\sqrt{i}\,et+m_2-k)}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\} \leqslant 0, \qquad (6)$$

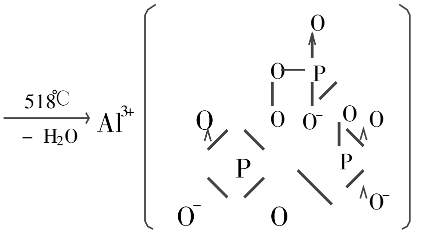
考虑函数:
$$I(\mathrm{d}) = (T-U)(m_1-m_2) + 2U\int_{\frac{k-m_1}{\mathrm{d}}}^{+\infty}\frac{(m_1-m_2)}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t - 2U\int_{\frac{k-m_2}{\mathrm{d}}}^{\frac{k-m_1}{\mathrm{d}}}\frac{(\mathrm{d}t+m_2-k)}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t, \qquad (7)$$

其中 $\mathrm{d}>0$,

$$I'(\mathrm{d}) = \frac{\mathrm{d}I(\mathrm{d})}{\mathrm{d}\,\mathrm{d}} = -2U\int_{\frac{k-m_2}{\mathrm{d}}}^{\frac{k-m_1}{\mathrm{d}}}\frac{t}{\sqrt{2c}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{2U}{\sqrt{2c}}[e^{-\frac{(k-m_1)^2}{2\mathrm{d}^2}} - e^{-\frac{(k-m_2)^2}{2\mathrm{d}^2}}]. \qquad (8)$$

$I'(\mathrm{d})$的符号由 k,m_1,m_2决定,与 d无关.当 $I'(\mathrm{d})\leqslant 0$时,$I(\mathrm{d})$关于 d是非增函数;当 $I'(\mathrm{d})>0$时,$I(\mathrm{d})$关于 d是增函数.因

(下转第 269页 Continue on page 269)



由表 3与红丹的对比数据看出，以三聚磷酸二氢铝为主体制备的防锈颜料具有等同或超过红丹的优异性能，由表 4看到其抗腐蚀能力较强。产品为白色，遮盖力不大 (武汉市涂料研究所，聚磷酸铝防锈颜料应用试验．1986年)，但可以调配成各种各样的颜色，故可避免红丹、锌铬黄等颜料因颜色深而给面漆的选择造成困难。该颜料经毒理学试验得其半致死量 $LD_{50}=18.0$ g/kg (小白鼠)，属实际无毒级，符合食品容器及儿童玩具涂装的要求。该颜料的优异防锈作用取决于三聚磷酸根离子 $P_3O_{10}^{5-}$，在目前的磷酸盐颜料中 $P_3O_{10}^{5-}$ 具有最强的络合金属离子的作用。涂膜中，三聚磷酸二氢铝按下式分解：

$$AlH_2P_3O_{10} \longrightarrow Al^{3+} + P_3O_{10}^{5-} + 2H^+ .$$

其中 $P_3O_{10}^{5-}$ 离子能与 Fe^{3+}、Fe^{2+}、Al^{3+}、Zn^{2+} 等金属离子形成稳定的螯合物，该螯合物不溶于水，具有强的硬度和键强度，牢固地粘附在金属表面，形成致密保护膜，阻止金属的再腐蚀，所以用三聚磷酸铝制成的颜料可以用于钢铁的重防腐涂料以及铝板、镀锌板的防锈涂料。

参考文献

1 d'Yveire F. Compt Rend, 1960, 251: 2958.

2 津波古充朝．化学の领域，1974, 28 (11): 37~40.

3 津波古充朝．化学の领域，1983, 37 (3): 199.

4 Kobayashi, Masamitsu; Sakamoto, Kiyoko. JP 61-227911, 1986.

5 Tsunako, Mitsutorno. JP 04-310510, 1992.

6 Eckler, Paul E; Ferara, Louis w; Fellows, Larry. A. US4758281, 1988.

7 吴展阳，袁爱群，莫炳辉等．改性三聚磷酸铝防锈颜料及其应用．涂料工业，1998 (5): 40~43.

(责任编辑：蒋汉明)

(上接第 261页 Continue from page 261)

$$0 \leqslant \int_{\frac{k-m_2}{d}}^{\frac{k-m_1}{d}} \frac{(dt+m_2-k)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leqslant$$

$$\int_{\frac{k-m_2}{d}}^{\frac{k-m_1}{d}} \frac{(m_2-m_1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{9}$$

所以 $\lim_{d\to+\infty} I(d) = T(m_1-m_2) \leqslant 0$. 这说明 $E(T(S^*, k)) - E(T(S_1, k)) = I(\sqrt{\ }_i e) = h_i(m_1, k) - h_i(m_2, k) \leqslant 0$，必有 $h_{i+1}(m_1, k) - h_{i+1}(m_2, k) \leqslant 0$，由 $h_{i+1}(\_)$ 的性质，有 $m_2 > \_{0(i+1)}(k)$，因 $m_1 < m_3$, $m_3 < m_4$, $m_2 < m_4$，故有 $h_{i+1}(m_3, k) - h_{i+1}(m_4, k) < 0$，即 $E(T(S^*, k)) - E(T(S_2, k)) = h_{i+1}(m_4, k) - h_{i+1}(m_3, k) > 0$. 同理可证当 $E(T(S^*, k)) - E(T(S_2, k)) \leqslant 0$ 时，必有 $E(T(S^*, k)) - E(T(S_1, k)) > 0$，这说明 $E(T(S^*, k)) - E(T(S_1, k))$，$E(T(S^*, k)) - E(T(S_2, k))$ 至少有一个大于零，这与 S^* 是工件的最优排序矛盾，定理 1成立．

3 结语

本文讨论 n个独立工件在一台机器上加工，工件的加工时间服从正态分布，工件的交货期设置为公共交货期的工件完工时间与公共交货期之差绝对值之和及工件完工时间之和的线性组合的期望值最小问题．(3)式确定待定公共交货期 k^*，推论 1说明当 $T \geqslant U$时，工件的最优排序 S^* 依 $\_{[i]}^*$ 按 $\_{[1]}^* \leqslant \_{[2]}^* \leqslant \cdots \leqslant \_{[n]}^*$ 排序，定理 1说明当 $U > T$时，工件的最优排序 S^* 具有 V型特征，因此，要寻找工件的最优排序需要计算 2^{n-1} 个工件的排序及确定 k，这个问题有待进一步的研究．

参考文献

1 Baker K R, Scudder G D. Sequencing with earliness and tardiness penalties: a review. Operations Research, 1990, 38: 22~36.

2 Cheng T, M Gupta. Survey of scheduling research involving due date determination decisions. Eur J Opnl Res, 1989, 38: 156~166.

3 Cheng T C E. Optimal common due date with limited completion time deviation. Opns Res, 1988, 15: 91~96.

4 Jia Chunfu, Tu Fengsheng. Bicriterion single machine scheduling with random processing times. System Engineering-Theory Methodology Applications, 1997, 6(2): 20~30.

(责任编辑：黎贞崇)