DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.04.001
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (4): 241~245

ρ混合、φ混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性*

Strong Convergence and Complete Convergence for the Weighted Sums of ρ-mixing and φ-mixing Random Sequences

吴群英
Wu Qunying

(桂林工学院基础部　桂林市建干路　541004)
(Dept. of Basic Sci., Guilin Institute of Technology, Jianganlu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要　给出ρ混合、φ混合序列的完全收敛和强收敛的充分条件，所得结论推广和改进了文献 [1~3] 的部分结论，推广并部分改进独立同分布的结果.

关键词　ρ混合　φ混合　加权和　完全收敛　强收敛　矩条件
中图法分类号　O 211.4

Abstract　Some sufficient conditions of the complete convergence and strong convergence of weighted sums of ρ-mixing and φ-mixing random sequences are established. The results improve and enlarge the results of [1~3], enlarge and partially improve the results of independence co-distribution.

Key words　ρ-mixing, φ-mixing, weighted sums, complete convergence, strong convergence, moment condition

1 引理

设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为一随机变量序列，$\{a_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是下三角实数矩阵，即当 $i > n$ 时，$a_{ni} = 0$，记 $T_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$，在独立同分布情形，$T_n$ 的完全收敛性有 Stout 在文献 [1] 中的著名定理:

定理 A　设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 为独立同分布序列，$0 < T \leqslant 1$，$EX_1 = 0$，$E|X_1|^{2/T} < \infty$，

$$|a_{ni}| \leqslant Cn^{-T},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 = o(\ln^{-1} n), \tag{1}$$

则　$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \xrightarrow{c} 0$.

其中 $\xrightarrow{c}$ 表示完全收敛.

吴本忠[2]把定理 A 推广到 d混合序列，但却加强了矩条件且只讨论 $T > 1/2$ 的情况，所以文献 [2] 未达到独立同分布的结果. 而在 d混合部分和的强收敛性中，文献 [4] 已获得接近独立同分布的结果，因此可推测文献 [2] 结果还未达到最优.

本文在 d混合、h混合序列下不加强矩条件，在第 2 部分推广、改进了定理 A 及文献 [2]，且当 $T > 1/2$ 时，可把条件 (1) 式去掉，而其余条件不变，故其结果比独立同分布的定理 A 还完美. 当 $0 < T \leqslant 1/2$ 时，也获得了较为理想的结果.

关于 T_n 的强收敛性，在独立同分布情形，有 Thrum 在文献 [5] 的著名定理:

定理 B　设 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 独立同分布，$0 < T \leqslant 1$，$EX_1 = 0$，$E|X_1|^{2/T} < \infty$，

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 = 1, \tag{2}$$

$$|a_{ni}| \leqslant Cn^{-T/2}, \tag{3}$$

则　$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \xrightarrow{a.s.} 0$.

其中 $\xrightarrow{a.s.}$ 表示强收敛.

杨善朝[6]把定理 B 推广到 h混合，d混合情形，但却把条件 (3) 加强为 $|a_{ni}| \leqslant Cn^{-T/2-\theta}$，$\theta > 0$，这相当于加强了矩条件，因此，其结果还未达到最优，本文在第 3 部分不加强矩条件，并对条件 (2) 有所减弱下，讨论了 d混合、h混合的强收敛性，所得结果推广和改进了定理 B 及文献 [6].

为行文方便，本文记 $S_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i$，$F_1^k \triangleq \sigma(X_i, i \leqslant k)$，$F_{k+n}^{\infty} \triangleq \sigma(X_i, i \geqslant k+n)$，$L_p(\mathscr{A})$ 为所有 $\mathscr{A}$ 可测且 p 阶矩有限的随机变量全体，以 C 记与 n 无关的正

2000-04-03收稿，2000-05-26修回。
* 广西自然科学基金资助项目 (桂科青 9912008).

常数，不同之处可取不同值，“$\ll$”表示通常的大“O”，“I_A”表示集合 A 上的示性函数，“$[\cdot]$”表示取整.

定义　记

$$\rho(n) \triangleq \sup_{k\in N}\ \sup_{X\in L_2(F_1^k),\,Y\in L_2(F_{k+n}^{\infty})} \frac{|E(X-EX)(Y-EY)|}{\sqrt{VarX\,VarY}},$$

$$\varphi(n) \triangleq \sup_{k\in N}\ \sup_{A\in\mathscr{A},\,B\in\mathscr{B},\,P(A)>0} |P(B|A)-P(B)|,$$

如 $\rho(n)\to 0$，$\varphi(n)\to 0$，$n\to\infty$，则称序列 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 ρ 混合的，φ 混合的.

引理 1　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 ρ 混合序列，$EX_i=0$，$E|X_i|^q<\infty$，$q\geqslant 2$，则 $\forall n\geqslant 1$ 均有

$$E|S_n|^q \ll n^{q/2-1}\max_{1\leqslant i\leqslant n}(EX_i^2)^{q/2} + n\max_{1\leqslant i\leqslant n}E|X_i|^q.$$

证明　由文献 [7] 知

$$E|S_n|^q \ll n^{q/2}\exp\Big(C\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho(2^i)\Big)\max_{1\leqslant i\leqslant n}(EX_i^2)^{q/2} + \exp\Big(C\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho^{2/q}(2^i)\Big)\max_{1\leqslant i\leqslant n}(EX_i)^q, \qquad (4)$$

因为 $\rho(2^i)\to 0$，$\rho^{2/q}(2^i)\to 0$，$i\to\infty$，所以存在自然数 N，使当 $i\geqslant N$ 时，恒有

$$\rho(2^i)\leqslant (\ln 2)/C,\quad \rho^{2/q}(2^i)\leqslant (\ln 2)/C,$$

故当 n 充分大时，有

$$\exp\Big(C\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho(2^i)\Big) = \exp\Big(C\sum_{i=0}^{N}\rho(2^i)\Big)\cdot\exp\Big(C\sum_{i=N+1}^{[\log n]}\rho(2^i)\Big) \leqslant \exp\Big(C\sum_{i=0}^{N}\rho(2^i)\Big)\cdot\exp(\log n\ln 2) \ll n, \qquad (5)$$

同样可得　$$\exp\Big(C\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho^{2/q}(2^i)\Big)\ll n, \qquad (6)$$

由 (4)～(6) 式引理 1 得证.

引理 2　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 ρ 混合序列，$EX_i=0$，$E|X_i|^q<\infty$，$q>2$，$\rho(n)=O(n^{-\theta})$，$\theta>0$，则

$$E|S_n|^q \ll n\Big\{\sum_{i=1}^n E|X_i|^q + \Big(\sum_{i=1}^n EX_i^2\Big)^{q/2}\Big\}.$$

证明　在文献 [3] 定理 1 取 m 使 $\delta(m)=(r-1)\alpha^r\leqslant 1$ 即得.

引理 3[6]　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 φ 混合序列，$EX_i=0$，$\{d_i, i\geqslant 1\}$ 为非负数序列，$|X_i|\leqslant d_i$，a. s.，$0<\lambda<1$，$m=[n^\lambda]$，则 $\forall \varepsilon>0$，有

$$P(|S_n|>\varepsilon)\leqslant 2eC_1\exp(-t\varepsilon + C_2t^2\Delta),$$

其中 $\Delta=\sum_{i=1}^n EX_i^2$，$t>0$ 为实数，$tm\max_{1\leqslant i<n}|d_i|\leqslant 1/4$，

$$C_1=\exp(2en^{1-\lambda}\varphi(m)),\quad C_2=4\Big(1+4\sum_{i=1}^{2m}\varphi^{1/2}(i)\Big).$$

引理 4[8]　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 ρ 混合序列，$X\in L_p(F_{-\infty}^k)$，$Y\in L_q(F_{k+n}^{\infty})$，$p, q>1$，$1/p+1/q=1$，则

$$|EXY-EXEY|\leqslant 4(\rho(n))^{2/p\wedge 2/q}(E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}.$$

2　完全收敛性

定理 1　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 ρ 混合同分布序列，$0<\alpha\leqslant 1$，

$$EX_1=0,\ E|X_1|^{2/\alpha}<\infty, \qquad (7)$$

$$|a_{ni}|\leqslant Cn^{-\alpha}, \qquad (8)$$

且当 $0<\alpha\leqslant 1/2$，进一步假设

$$\sum_{i=1}^n a_{ni}^2\leqslant Cn^{-\theta_1},\ \theta_1>0,\ \rho(n)\leqslant Cn^{-\theta_2},\ \theta_2>0, \qquad (9)$$

则　$$T_n=\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i\xrightarrow{c}0,\ n\to\infty.$$

对不同分布，也有类似结果.

推论　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 ρ 混合序列，$0<\alpha\leqslant 1$，存在随机变量 X，使

$$\forall t>0,\ \sup_i P(|X_i|\geqslant t)\leqslant P(|X|\geqslant t),\ EX_1=0,\ E|X_1|^{2/\alpha}<\infty, \qquad (7)'$$

$$|a_{ni}|\leqslant Cn^{-\alpha},$$

且当 $0<\alpha\leqslant 1/2$ 时，$\sum_{i=1}^n a_{ni}^2\leqslant Cn^{-\theta_1}$，$\theta_1>0$，$\rho(n)\leqslant Cn^{-\theta_2}$，$\theta_2>0$，则　$T_n=\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i\xrightarrow{c}0$.

注：在 $\alpha>1/2$ 时，没有要求混合速度，而由文献 [8] 知 φ 混合，ψ 混合，λ 混合都是 ρ 混合的，故定理 1 及推论在 $\alpha>1/2$ 时，对 φ 混合，ψ 混合，λ 混合也成立.由于去掉了条件 (1)，所以定理 1 及推论改进和推广了定理 A 及文献 [2]，获得了非常理想的结果.但当 $0<\alpha\leqslant 1/2$，条件 (9) 比 (1) 强，如把 ρ 混合限制在 φ 混合，则条件 (9) 可达到条件 (1)，有下面定理：

定理 2　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 φ 混合同分布序列，$0<\alpha\leqslant 1/2$，

$$EX_1=0,\ E|X_1|^{2/\alpha}<\infty,\ |a_{ni}|\leqslant Cn^{-\alpha}\sum_{i=1}^n a_{ni}^2=o(\ln^{-1}n), \qquad (10)$$

$$\exists\gamma>0,\ \gamma/(1+\gamma)<\alpha/2,$$

使　$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{\gamma}(n)<\infty, \qquad (11)$$

则　$T_n\xrightarrow{c}0$，$n\to\infty$.

同样，对不同分布，把条件 $E|X_1|^{2/\alpha}<\infty$ 用条件 (7)′ 代替，定理 2 仍成立.

定理 1 的证明　取 $0<\delta<\alpha/2$，$N>1/(2-2\delta/\alpha)$，$\forall\varepsilon>0$，记

$$X_{ni}(1)=X_iI_{(|a_{ni}X_i|\leqslant n^{-\delta})},$$

$$\tilde{X}_{ni}(1)=X_{ni}(1)-EX_{ni}(1);$$

$$X_{ni}(2)=X_iI_{(n^{-\delta}<|a_{ni}X_i|\leqslant\varepsilon/N)},$$

$\tilde{X}_{ni}(2) = X_{ni}(2) - EX_{ni}(2)$;

$X_{ni}(3) = X_i I_{(|a_{ni}X_i| \geqslant X/N)}$,

$\tilde{X}_{ni}(3) = X_{ni}(3) - EX_{ni}(3)$;

$$T_n(j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_{ni}(j),$$

$$\tilde{T}_n(j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} \tilde{X}_{ni}(j), j = 1, 2, 3.$$

有 $X_i = \tilde{X}_{ni}(1) + \tilde{X}_{ni}(2) + \tilde{X}_{ni}(3)$,

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1) + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}(2) + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}(3) = \tilde{T}_n(1) + \tilde{T}_n(2) + \tilde{T}_n(3).$$

故只需证明 $\tilde{T}_n(j) \xrightarrow{c} 0, n \to \infty, j = 1, 2, 3.$

1) 先证 $\tilde{T}_n(1) \xrightarrow{c} 0, n \to \infty$, (12)

1. 1) 当 $0 < T \leqslant 1/2$ 时, 在引理 2中取 $q > \max(2/T + 1/W, 4/\theta_1)$, 且由 Markov不等式, (7)、(8)式有

$$P(|\tilde{T}_n(1)| > X) = P(|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1)| > X) \ll E|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1)|^q \ll$$

$$n\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1)|^q + \{\sum_{i=1}^{n} E(a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1))^2\}^{q/2} \} \leqslant$$

$$n\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i|^q I_{(|a_{ni}X_i| < n^{-W})} + \{\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2\}^{q/2}\} \leqslant$$

$$n\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}X_i|^{2/T} n^{-W(q-2/T)} + n^{1-\theta_1 q/2}\} \leqslant n^{-W(q-2/T)} + n^{1-\theta_1 q/2},$$

由 q的取法, 有

$$-W(q - 2/T) < -1, 1 - \theta_1 q/2 < -1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\tilde{T}_n(1)| > X) < \infty$,

即 $\tilde{T}_n(1) \xrightarrow{c} 0, n \to \infty$.

1. 2) 当 $T > 1/2$时, 在引理 1中取 $q > \max(2/(T - 1/2), 2/T)$, 且由 Markov不等式, 有

$$P(|\tilde{T}_n(1)| > X) = P(|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1)| > X) \ll$$

$$E|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1)|^q \ll n^{q/2-1} \max_{1\leqslant i\leqslant n}(E(a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1))^2)^{q/2} + n\max_{1\leqslant i\leqslant n} E|a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1)|^q,$$

由 C_r 不等式, 条件 (7)、(8) 式, 且注意到 $2 < 2/T$, 有

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}(E(a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1))^2)^{q/2} \ll \max_{1\leqslant i\leqslant n}(a_{ni}^2 EX_1^2 I_{(|a_{ni}X_i| < n^{-W})})^{q/2} \leqslant n^{-Tq},$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} E|a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1)|^q \ll \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{ni}|^{2/T} E|X_1|^{2/T} |a_{ni}X_i|^{q-2/T} I_{(|a_{ni}X_i| \leqslant n^{-W})} \leqslant n^{-2-W(q-2/T)},$$

故 $P(|\tilde{T}_n(1)| > X) \leqslant n^{q/2-1-Tq} + n^{-1-W(q-2/T)}$,

由 q的取法得 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\tilde{T}_n(1)| > X) < \infty$,

即 $\tilde{T}_n(1) \xrightarrow{c} 0, n \to \infty$.

故综合 1. 1), 1. 2) 即得 (12) 式成立.

2) 再证 $\tilde{T}_n(2) \xrightarrow{c} 0, n \to \infty$, (13)

由于 $\tilde{T}_n(2) = T_n(2) - ET_n(2)$,

先证 $ET_n(2) \to 0, n \to \infty$, (14)

由 W的取法, 有

$$|ET_n(2)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_{ni}(2)| = \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i| I_{(n^{-W} < |a_{ni}X_i| \leqslant X/N)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{X}{N} P(n^{-W} < |a_{ni}X_i|$$

$$\leqslant X/N) \ll \sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni}X_i| > n^{-W}) \ll \sum_{i=1}^{n} n^{2W/T} E|a_{ni}X_i|^{2/T}$$

$$\leqslant n^{2W/T-2+1} = n^{-1+2W/T} \to 0, n \to \infty,$$

(14) 式成立, 所以当 n 充分大时, 有

$$P(|\tilde{T}_n(2)| > 2X) \leqslant P(|T_n(2)| > X), \quad (15)$$

故只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_n(2)| > X) < \infty.$$

由于

$$\{|T_n(2)| > X\} \subset \{\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}X_{ni}(2)| > X\} = \{\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}X_i| I_{(n^{-W} < |a_{ni}X_i| \leqslant X/N)} > X\} \subset$$

$\{$至少存在 N 个下标 i, 使 $|a_{ni}X_{ni}(2)| > n^{-W}\} = \bigcup_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leqslant n} A_{i_1} \cdots A_{i_N}$,

其中 $A_i \triangleq \{|a_{ni}X_i| > n^{-W}\}$,

所以 $P(|T_n(2)| > X) \leqslant \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leqslant n} P(A_{i_1} \cdots A_{i_N})$, (16)

在引理 4中, 取 $X = I_A, Y = I_B, p = 2, q = 2$, 得

$$P(AB) \leqslant P(A)P(B) + 4d(n)P^{1/2}(A)P^{1/2}(B),$$

由此得

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_N}) \leqslant (1 + 4d(i_2 - i_1)P^{1/2}(A_{i_1})P^{1/2}(A_{i_2} \cdots A_{i_N}))P(A_{i_1})P(A_{i_2} \cdots A_{i_N}) \leqslant$$

$$(1 + 4d(1)P^{-1}(A_{i_1} \cdots A_{i_N}))P(A_{i_1})P(A_{i_2} \cdots A_{i_N}) \triangleq CP(A_{i_1})P(A_{i_2} \cdots A_{i_N}) \leqslant \cdots \leqslant C^N P(A_{i_1} \cdots A_{i_N}),$$

由此及 (16) 式得

$$P(|T_n(2)| > X) \ll \sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_N \leqslant n} P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_N}) \leqslant (\sum_{j=1}^{N} P(A_{i_j}))^N$$

$$\leqslant (\sum_{j=1}^{N} P(|a_{ni_j}X_{i_j}| > n^{-W}))^N \ll (n^{2W/T}\sum_{j=1}^{N} |a_{ni_j}|^{2/T})^N \leqslant$$

$$(n^{2W/T}\sum_{j=1}^{N} n^{-2})^N \ll n^{(2W/T-2)N}, \quad (17)$$

由 W, N 的取法, 有 $2(W/T - 1)N < -1$,

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_n(2)| > X) < \infty$,

由此及 (15) 式, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\tilde{T}_n(2)| > 2X) < \infty$,

故 $\tilde{T}_n(2)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$.

3) 最后证 $\tilde{T}_n(3)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$, (18)

由(14)式的证明过程易知 $ET_n(3)\to 0, n\to\infty$,

所以只需证明 $T_n(3)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$,

由于

$$\{|T_n(3)|>X\}\subset\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}X_i|I_{(|a_{ni}X_i|>X/N)}>X\}$$

$$\subset\{\exists i, 1\leqslant i\leqslant n, |a_{ni}X_i|>X/N\}$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\{|a_{ni}X_i|>X/N\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{|X_i|>Cn^{T}\},$$

所以 $P\{|T_n(3)|>X\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|>Cn^{T})$

$$=nP(|X_1|>Cn^{T}),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|T_n(3)|>X)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}nP(|X_1|>Cn^{T})$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{2}{T}-1}P(|X_1|>Cn^{T})\ll E|X_1|^{2/T}<\infty.$$

即(18)成立,综合(12),(13),(18)式,定理 1得证.

用完全类似的方法可证推论,略.

定理 **2**的证明 仍取 $0<W<T/2$,沿用定理 1的截尾方法和有关记号,由于在定理 1的第 2),第 3)部的证明过程中对 a_{ni}只用了条件(8),未用条件(9),故 $\tilde{T}_n(j)\xrightarrow{c}0, j=2,3$,仍成立.故下只需证明

$$\tilde{T}_n(1)\xrightarrow{c}0, n\to\infty. \quad (19)$$

取 $\lambda=U/(1+U)<T/2, \lambda<r<T/2$,对 $X_{ni}(1)$再分为两段:

$X_{ni}(1,1)=X_iI_{(|a_{ni}X_i|\leqslant n^{-r})}, X_{ni}(1,2)=X_iI_{(n^{-r}<|a_{ni}X_i|\leqslant n^{-W})}$,

$\tilde{X}_{ni}(1,j)=X_{ni}(1,j)-EX_{ni}(1,j), j=1,2.$

有 $\tilde{T}_n(1)=\sum_{i=1}^{n}a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1,1)+\sum_{i=1}^{n}a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1,2)\triangleq\tilde{T}_n(1,1)+\tilde{T}_n(1,2)$.

故要证 $\tilde{T}_n(1)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$,

只需证 $\tilde{T}_n(1,j)\xrightarrow{c}0, n\to\infty, j=1,2.$

先证 $\tilde{T}_n(1,1)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$, (20)

由于 $|a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1,1)|\leqslant 2n^{-r}\triangleq d_i$,

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}E(a_{ni}\tilde{X}_{ni}(1,1))^2\leqslant C\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2\triangleq CB_n,$$

由 $U/(1+U)<T/2$,有 $U<1/2$,所以由 $\sum_{i=1}^{\infty}h^{U}(n)<\infty$,

得 $C_2=4(1+4\sum_{i=1}^{2m}h^{1/2}(i))\leqslant 4(1+4\sum_{i=1}^{\infty}h^{1/2}(i))<\infty$,及 $h(m)=o(m^{-1/U})$,

取 $m=n^{\lambda}$,有

$C_1=\exp(2en^{1-\lambda}h(m))=\exp(2en^{1-\lambda}n^{-\lambda/U})=e^{2e}<\infty$,

令 $t=\min\{X(2C_2CB_n)^{-1}, n^{r-\lambda}/8\}$,

有 $tm\max_{1\leqslant i\leqslant n}|d_i|\leqslant n^{r-\lambda}n^{\lambda}2n^{-r}/8=1/4$,

所以由引理 3有

$P(|\tilde{T}_n(1,1)|>X)\ll\exp(-tX+C_2t^2\Delta)\leqslant\exp(-tX+C_2t^2CB_n)\leqslant\exp(-tX+t\frac{X}{2})=\exp(-tX/2)$,

1.1) 当 $t=X(2C_2CB_n)^{-1}$时,因为 $B_n=o(\ln n)^{-1}$,所以当 n充分大时,有 $B_n\leqslant X(8C_2C\ln n)^{-1}$,

即有 $P(|\tilde{T}_n(1,1)|>X)\ll\exp(-tX/2)\leqslant\exp(-2\ln n)=n^{-2}$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|\tilde{T}_n(1,1)|>X)<\infty$;

1.2) 当 $t=n^{r-\lambda}/8$时,因为 $\lambda<r$,所以当 n充分大时,有 $n^{r-\lambda}\geqslant(32\ln n)/X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|\tilde{T}_n(1,1)|>X)\ll\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-Xn^{r-\lambda}/16)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}<\infty;$$

综合 1.1),1.2)即得

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(|\tilde{T}_n(1,1)|>X)<\infty,$$

即 $\tilde{T}_n(1,1)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$.

再证 $\tilde{T}_n(1,2)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$, (21)

在引理 2中取 $q>\max(2/W+2, \frac{2}{(T-r)(1/T-1)})$,有

$P(|\tilde{T}_n(1,2)|>X)\ll E|\tilde{T}_n(1,2)|^q\ll n\{\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X_i|^qI_{(|a_{ni}X_i|\leqslant n^{-W})}+(\sum_{i=1}^{n}Ea_{ni}^2X_i^2I_{(n^{-r}<|a_{ni}X_i|<n^{-W})})^{q/2}\}\leqslant n\{\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2E|X_1|^2|a_{ni}X_i|^{q-2}I(|a_{ni}X_i|\leqslant n^{-W})+(\sum_{i=1}^{n}Ea_{ni}^2X_i^2(\frac{|a_{ni}X_i|}{n^{-r}})^{2/T-2})^{q/2}\}\leqslant\ln^{-1}mn^{-W(q-2)+1}+(\ln n)^{-q/2}n^{-(T-r)(1/T-1)q+1}\leqslant n^{-W(q-2)+1}+n^{-(T-r)(1/T-1)q+1}$,

由 q的取法,得

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(|\tilde{T}_n(1,2)|>X)<\infty,$$

即 $\tilde{T}_n(1,2)\xrightarrow{c}0, n\to\infty$.

故综合(20),(21)式即得(19)式成立,定理 2证毕.

3 强收敛性

对于强收敛性,可把条件(8)的阶减弱一半,有下面定理:

定理 3　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 d混合同分布序列，

$$0 < \mathrm{T} \leqslant 1, EX_1 = 0, E|X_1|^{2/\mathrm{T}} < \infty, \quad (22)$$

$$|a_{ni}| \leqslant Cn^{-\mathrm{T}}, \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \leqslant Cn^{-\theta_1}, \theta_1 > 0, \mathrm{d}(n) \leqslant Cn^{-\theta_2}, \theta_2 > 0, \quad (24)$$

则

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \xrightarrow{\text{a. s.}} 0, \ n \to \infty. \quad (25)$$

定理 4　设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为 h混合同分布序列，$0 < \mathrm{T} \leqslant 1$,

$EX_1 = 0, E|X_1|^{2/\mathrm{T}} < \infty, |a_{ni}| \leqslant Cn^{-\mathrm{T}}, \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 = o(\ln^{-1} n)$,

$\exists\, \mathrm{U} > 0, \mathrm{U}/(1+\mathrm{U}) < \mathrm{T}/2$,

使 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{h}^{\mathrm{U}}(n) < \infty$,

则 $T_n \xrightarrow{\text{a. s.}} 0, n \to \infty$.

定理 3的证明　由文献 [9]第二章第二节引理 1知 $T_n \xrightarrow{\text{a. s.}} 0, n \to \infty$ 等价于 $\sup_{k \geqslant n} |T_k| \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$. 得 (25) 式等价于 $\forall\, \mathrm{X} > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} P\bigcup_{n=k}^{\infty}\{|T_n| > 6\mathrm{X}\} = 0. \quad (26)$$

取 $0 < \mathrm{W} < \min(\mathrm{T}/2, \theta_1/(2/\mathrm{T} - 1)), N > 1/(1 - 2\mathrm{W}/\mathrm{T})$.

仍沿用定理 1证明的截尾方法和记号，由于 $\{|T_n| > 6\mathrm{X}\} \subset \bigcup_{j=1}^{3}\{|\tilde{T}_n(j)| > 2\mathrm{X}\}$,

所以如记 $J_k(j) \triangleq P(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{|\tilde{T}_n(j)| > 2\mathrm{X}\})$，则要证 (26) 式只需证明

$$J_k(j) \to 0, k \to \infty, j = 1, 2, 3.$$

1) 先证 $J_k(1) \to 0, k \to \infty$,

在引理 2中取 $q > \max(2N\mathrm{W} + 2/\mathrm{T}, 4/\theta_1)$，类似于 (12) 的证明，

得 $P(|\tilde{T}_n(1)| > 2\mathrm{X}) \ll n^{1-\mathrm{W}(q-2/\mathrm{T})} + n^{1-\theta_1 q/2}$;

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\tilde{T}_n(1)| > 2\mathrm{X}) < \infty$,

故 $J_k(1) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} P\{|\tilde{T}_n(1)| > 2\mathrm{X}\} \to 0, k \to \infty$.

2) 再证 $T_k(2) \to 0, k \to \infty$,

由 W的取法有

$$|ET_n(2)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i| I_{(n^{-\mathrm{W}} < |a_{ni}X_i| \leqslant \mathrm{X}/N)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i| \left(\frac{|a_{ni}X_i|}{n^{-\mathrm{W}}}\right)^{2/\mathrm{T}-1} \ll \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 |a_{ni}|^{2/\mathrm{T}-2} n^{\mathrm{W}(2/\mathrm{T}-1)} \leqslant$$

$$n^{-\theta_1 - \mathrm{T}(1/\mathrm{T}-1) + \mathrm{W}(2/\mathrm{T}-1)} \leqslant n^{-\theta_1 - \mathrm{W}(2/\mathrm{T}-1)} \to 0, \quad (27)$$

所以当 n 充分大时，有

$$P(|\tilde{T}_n(2)| > 2\mathrm{X}) \leqslant P(|T_n(2)| > \mathrm{X}), \quad (28)$$

类似于 (17) 的证明过程，有

$$P(|T_n(2)| > \mathrm{X}) \ll n^{-(1-2\mathrm{W}/\mathrm{T})N},$$

由 W, N 的取法及 (28) 式有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\tilde{T}_n(2)| > 2\mathrm{X}) < \infty,$$

所以 $J_k(2) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} P(|\tilde{T}_n(2)| > 2\mathrm{X}) \to 0, k \to \infty$.

3) 最后证 $J_k(3) \to 0, k \to \infty$,

由 (27) 式的证明过程易知

$$ET_n(3) \to 0, n \to \infty, \quad (29)$$

又因

$$(T_n(3))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^2 \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 I_{(|a_{ni}X_i| \leqslant \mathrm{X}/N)}$$

$$\ll n^{-\theta_1} \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 P(|X_1| \geqslant Ci^{\mathrm{T}/2}), \quad (30)$$

由于 $\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_1| \geqslant Ci^{\mathrm{T}/2}) \ll E|X_1|^{\mathrm{T}/2} < \infty$,

所以由 Borel-Cantelli引理，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 P(|X_1| \geqslant Ci^{\mathrm{T}/2}) < \infty, \text{a. s.},$$

由此及 (30) 式得 $T_n(3) \xrightarrow{\text{a. s.}} 0, n \to \infty$,

再由 (29) 式，得

$$\tilde{T}_n(3) = T_n(3) - ET_n(3) \xrightarrow{\text{a. s.}} 0, n \to \infty,$$

由文献 [9]的引理 1得 $J_k(3) \to 0, k \to \infty$.

定理 3证毕.

定理 4的证明　综合定理 2及定理 3的证明方法可证，略.

参考文献

1　Stout W F. Almost Sure Convergence. New York: Academic Press, 1974.

2　吴本忠. ρ混合序列加权和的完全收敛性. 高校应用数学学报，1997，12: 291～297.

3　杨善朝. 混合序列矩不等式和非参数估计. 数学学报，1997，40 (2): 271～279.

4　吴群英. 混合序列的强大数律. 数学研究，1999，32: 92～97.

5　Thrum R. A remark on almost sure convergence of weighted suns. Probab. Th Rel Fields, 1987, 75: 425～430.

6　杨善朝. 混合序列加权和的强收敛性. 系统科学与数学，1995，7: 254～265.

7　邵启满. 关于 ρ混合序列的完全收敛性. 数学学报，1989，32: 377～393.

8　陆传赉，林正炎. 混合相依变量的极限理论. 北京: 科学出版社，1997.

9　Chow Y S, Teicher H. Probability Theory. New York: Springer Verlag, 1978.

(责任编辑: 黎贞崇)