DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.03.006
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7(3): 183~186, 189

具多个时滞的差分方程的稳定性*

Stability for Difference Equation with Several Delays

陈武华

Chen Wuhua

(广西民族学院数学系 南宁市西乡塘路 530006)

(Dept. of Math., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 考虑如下时滞差分方程 $x(n+1)-x(n)=F(n,x_n)$,其中 $F: Z^+\times Cd(M)\to R$,获得了零解一致稳定与一致渐近稳定的充分条件,并得到不同于文献 [1] 的一个结果.

关键词 差分方程 时滞 稳定性

中图法分类号 O 175.1

Abstract Consider the following delay difference equation $x(n+1)-x(n)=F(n,x_n)$, where $F: Z^+\times Cd(M)\to R$, results for uniform stability and uniformaly asymptotic stability of the zero solution of the equation are proved, and a condition for stability of the equation different from references [1] is obtained.

Key words difference equation, delay, stability

设 Z、Z^+ 分别表示整数集和非负整数集,对于整数 n、m,$n<m$,定义 $Z(n)=\{n,n+1,\cdots\}$,$Z(n,m)=\{n,n+1,\cdots,m\}$.考虑时滞差分方程

$$x(n+1)-x(n)=F(n,x_n),n\in Z^+, \qquad (1)$$

这里 $F: Z^+\times Cd(M)\to R$,$Cd(M)=\{h: Z(-k,0)\to R$ 且 $\max_{m\in Z(-k,0)}|h(m)|\leqslant M\}$,$k\in Z^+$,$x_n$ 定义为 $x_n(m)=x(n+m)$,$m\in Z(-k,0)$.方程(1)的一个特殊形式为方程

$$x(n+1)-x(n)=-p(n)x(n-k),n\in Z^+, \qquad (2)$$

其中 $p(n)\geqslant 0$,方程(2)可以看成时滞微分方程

$$x'(t)=-b(t)x(t-k) \qquad (3)$$

的离散形式.文献 [1] 首先将方程(3) 3/2稳定性结果(参见文献 [2])推广到差分方程(2),并指出了两者结果上的差异.最近文献 [3]、[4]分别对文献 [1] 的结果作了推广.本文将考虑方程(1)含有多个时滞的情形,获得了零解一致稳定与一致渐近的充分条件,并作为推论,获得了一个与文献 [1] 不同的关于方程(2)零解稳定的结果.

以下设 $F(n,h)$ 满足

$$-\sum_{i=1}^{l}T_i\max_{m\in Z(-k_i,0)}(h(m))\leqslant F(n,h)\leqslant \sum_{i=1}^{l}T_i\max_{m\in Z(-k_i,0)}(-h(m)) \qquad (4)$$

或者

$$-\sum_{i=1}^{l}T_i\max\{0,\max_{m\in Z(-k_i,0)}(h(m))\}\leqslant F(n,h)\leqslant \sum_{i=1}^{l}T_i\max\{0,\max_{m\in Z(-k_i,0)}(h(m))\}, \qquad (5)$$

其中 $T_i\in R^+$,$i=1,\cdots,l$,$k_i\in Z^+$,$i=1,\cdots,l$.以下为叙述方便,总假定 $k_1\leqslant k_2\leqslant\cdots\leqslant k_l=k$,$\_{}_0=\sum_{i=1}^{l}T_i$,$\_{}_1=\sum_{i=1}^{l}T_i(k_i+1)$,对于实数 a,$[a]$表示取 a 的整数部分.

本文主要结果如下:

定理 1 设(4)式成立,

(i) 若

$$\_\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}, \qquad (6)$$

则(1)式的零解一致稳定.

(ii) 若

$$\_{}_1<\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}, \qquad (7)$$

则(1)式的零解一致渐近稳定.

定理 2 设(5)式成立,

(i) 若

$$\_\leqslant 1+\frac{1}{k}, \qquad (8)$$

则(1)式的零解一致稳定.

(ii)若

$$\_{}_1<1+\frac{1}{k} \qquad (9)$$

2000-02-01收稿。
* 广西民族学院科研基金资助项目。

且 $\max_{m\in Z(-k,0)}|\mathrm{h}_n(m)-c|\to 0, n\to\infty$，其中 $c\neq 0$, $\mathrm{h}_n\in Cd(M)$蕴含着

$$F(n,\mathrm{h}_n)\text{并不收敛于零}. \quad (10)$$

则(1)式的零解一致渐近稳定.

定理 3 设(5)式成立,且 $k\leqslant 2$或 $k\geqslant[\frac{1}{_0}]$或$\frac{1}{_0}\geqslant k$,

(i)若(6)式成立,则(1)式的零解一致稳定;

(ii)若(7)式、(10)式成立,则(1)式的零解一致渐近稳定.

定理 4 设存在 $T>0$及 $k\in Z^+$ 使得对所有 $\mathrm{h}\in Cd(M)$有

$$-T\max\{0,\max_{m\in Z(-k,0)}\mathrm{h}(m)\}\leqslant F(n,\mathrm{h})\leqslant T\max\{0,\max_{m\in Z(-k,0)}(-\mathrm{h}(m))\}. \quad (11)$$

(i)若 $T(k+1)\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}$,则(1)式的零解一致稳定;

(ii)若 $T(k+1)<\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}$且(10)式成立,则(1)式的零解一致渐近稳定.

定理 4不能为文献[1]的结果所包含. 例如对于方程(2)零解一致稳定性. 文献[1]对 $p(n)$附加的条件为$\sum_{i=n-k}^{n}p(i)\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2(k+1)}$,显然当$\frac{1}{k+1}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2(k+1)})<p(n)\leqslant\frac{1}{k+1}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2k})$时,文献[1]的结果不适用,但由定理 4,(1)式的零解一致稳定.

1 定理证明

引理 1 记 $\_^*=\frac{k+1}{k^2+\frac{1}{2}(k^2-k)}$, $k\in Z(3)$,则

$$V_0=\sup_{k\in Z(3)}\{\frac{1}{2}k\_^*(\frac{3}{2}+\frac{1}{2k})+\frac{\_^{*2}}{4}\}<1.$$

证明 记 $h(k)=\frac{1}{2}k\_^*(\frac{3}{2}+\frac{1}{2k})+\frac{\_^{*2}}{4}$,易验证 $h(3)$、$h(4)$均小于 1. 下面考虑 $k\geqslant 5$的情况,注意 $1-h(k)=\frac{1}{4(k^2+\frac{1}{2}(k^2-k))}(k^4-4k^3-4k-1+(5k^2-4k-1)\frac{1}{2}(k^2-k))$,而当 $k\geqslant 5$时, k^4-4k^3-4k-1及 $5k^2-4k-1$均大于零,故 $h(k)<1$, $k\geqslant 5$,又由于 $\lim_{k\to\infty}h(k)=\frac{3}{4}<1$. 从而 $V_0=\sup_{k\in Z(3)}h(k)<1$.

以下记 $\|\mathrm{h}\|_i=\max_{m\in Z(-i,0)}|\mathrm{h}(m)|$, 并约定当 $m>n$时, $\sum_{i=m}^{n}p(i)=0$.

记 $N_0=[\frac{1}{\_0}]$,若$\frac{1}{_0}$不是整数,记 $V_1=N_0\_0$. 若$\frac{1}{_0}$为整数,记 $V_1=(N_0-1)\_0$. 易见 $V_1<1$. 当(4)式及 $_1\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}$成立时,记 $V_2=((k+1)\_0+\frac{k-1}{2k})((k+1)\_0+2-\_1)^{-1}$,当(5)式及 $_1\leqslant 1+\frac{1}{k}$成立时,记 $V_2=((k+1)\_0+\frac{k-1}{k})((k+1))\_0+2-\_1)^{-1}$,显然有 $V_2\leqslant 1$.

引理 2 设(4)式、(6)式成立或者(5)式、(8)式成立, $n\in Z(n_0+2k+1)$. 若有 $n\in Z(n_1,n_1+k)$使得 $x(i)x(n)\geqslant 0$, $i\in Z(n_1,n)$,而 $x(n_1-1)x(n)<0$,则

$$|x(n)|\leqslant V\|x_{n_1-1}\|_2, \quad (12)$$

其中 $V\leqslant\max\{\_0,\frac{15}{16},V_0,V_1,V_2\}\leqslant 1$.

证明 记 $X=\|x_{n_1-1}\|_2$. 若(12)式不成立,则存在 $n_3\in Z(n_1,n)$,使得$|x(n_3)|>VX$,而$|x(i)|\leqslant VX\leqslant X$, $i\in Z(n_1,n_3-1)$. 不妨设 $x(n_3)>0$,则 $x(i)>0$, $i\in Z(n_1,n_3-1)$及 $x(n_1-1)<0$. 于是存在 $\theta\in(0,1]$,使得

$$x(n_1-1)=-\theta(x(n_1)-x(n_1-1)),$$

由(1)式、(4)式或(5)式得

$$|x(i+1)-x(i)|\leqslant\sum_{i=1}^{l}T_iX=\_0X, i\in Z(n_1-k-1,n_3-1),$$

于是

$$VX<x(n_3)=x(n_1-1)+\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}(x(i+1)-x(i))=-\theta(x(n_1)-x(n_1-1))+\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}(x(i+1)-x(i))\leqslant\_0(n_3-n_1+1-\theta),$$

从而

$$n_3-n_1+1-\theta>\frac{V}{\_0}, \quad (13)$$

记 $N=[\frac{V}{\_0}]$, 由 V的定义, $V\leqslant 1$, 从而 $N\leqslant[\frac{1}{\_0}]=N_0$, 令 $n_2=n_3-N$, 则 $n_2\geqslant n_1$且

$$n_3-n_2\leqslant\frac{V}{\_0},\quad n_3-n_2+1>\frac{V}{\_0}.$$

再注意到 (13) 式, 故存在 $Z\in[0,1)$ 使得

$$n_3-n_2+Z\lambda(n_2-1)=\frac{V}{\_0},$$

其中 $\lambda(i)=1$, $i\in Z(n_1,n_3-1)$, $\lambda(n_1-1)=1-\theta$.

下面估计 $x(i)$,当 $i\in(n_2,n_3-1)$时

$$x(i)=x(n_3)-\sum_{j=i}^{n_3-1}(x(j+1)-x(j))>VX-X\_0(n_3-i)=X(V-\_0(n_3-i)),$$

当 $i\in Z(n_1-k-1,n_1-1)$时

$$x(i)=x(n_1-1)-\sum_{j=i}^{n_1-2}(x(j+1)-x(j))=-\theta$$

$(x(n_1)-x(n_1-1))-\sum_{j=i}^{n_1-2}(x(j+1)-x(j))\geqslant -X\theta\_0$ $-X(n_1-1-i)\_0=-\_0X(\theta+n_1-1-i)$,

令 $d(i)=$

$$\begin{cases} X(V-\_0(n_3-i)), & i\in Z(n_2,n_3-1),\\ 0, & i\in Z(n_1,n_2-1),\\ -\_0X\min\{\frac{1}{\_0},\theta+n_1-1-i\}, & i\in Z(n_1-k-1,n_1-1),\end{cases}$$

则 $d(i)$单调增,且 $x(i)\geqslant d(i)$, $i\in Z(n_1-k-1,n_3-1)$. 于是

$$x(n_3)=x(n_1-1)+\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}(x(i+1)-x(i))=$$

$$\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)(x(i+1)-x(i))=\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)F(i,x^i).$$

若(4)式成立,则

$$x(n_3)\leqslant\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)(\sum_{j=1}^{l}T_j\max_{m\in Z(-k_j,0)}(-x(m+i))\leqslant$$

$$-\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)d(i-k_j). \quad (14)$$

若(5)式成立,则

$$x(n_3)\leqslant\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)\max\{0,-d(i-k_j)\}. \quad (15)$$

下面分几种情况讨论:

情况 **1** $k=1$,

由前面的假设, $k_1=k_2=\cdots=k_l=1$, 注意到 $n_3\leqslant n_1+1$从而, 由 (14) 式或 (15) 式

$$x(n_3)\leqslant-\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_1}\lambda(i)d(i-1)=\_0^2X\sum_{i=n_1-1}^{n_1}\lambda(i)$$

$$\min\{\frac{1}{\_0},\theta+n_1-1-i\}=\_0^2X(\min\{\frac{1}{\_0},\theta\}+(1-\theta)\min\{\frac{1}{\_0},1+\theta\}).$$

情况 **1.1** $\frac{1}{\_0}\geqslant\theta+1$,

$$x(n_3)\leqslant\_0^2X((1-\theta)(1+\theta)+\theta)\leqslant\_0^2X(1+\theta)\leqslant\_0X$$

情况 **1.2** $\frac{1}{\_0}<\theta+1$,

$$x(n_3)\leqslant\_0^2X((1-\theta)\frac{1}{\_0}+\theta)\leqslant(\_0^2\theta+\_0(1-\theta))X$$
$$=(-(\_0-\_0^2)\theta+\_0)X\leqslant\_0X,$$

从而,总有 $x(n_3)\leqslant\_0X\leqslant VX$,这与 $x(n_3)>VX$矛盾.

情况 **2** $k=2$且$\frac{1}{_0}\geqslant k$,或者 $k\in Z(3)$且$\frac{1}{_0}\geqslant\frac{1}{_^*}$

由(14)式或(15)式,

$$x(n_3)\leqslant\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)\max\{0,-d(i-k_j)\}\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_1+k-1}\lambda(i)\max\{0,-d(i-k_j)\}=\sum_{j=1}^{l}T_j(\sum_{i=n_1-1}^{n_1+k_j-1}+$$

$$\sum_{i=n_1+k_j}^{n_1+k-1})\lambda(i)\max\{0,-d(i-k_j)\}=-\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_1+k_j-1}\lambda(i)d(i$$

$$-k_j)\leqslant\_0X\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_1+k_j-1}\lambda(i)(\theta+n_1-1-i+k_j)=$$

$$\_0X\sum_{j=1}^{l}T_j(\frac{1}{2}k_j(k_j+1)+\theta-\theta^2)\leqslant\frac{\_0k}{2}\sum_{j=1}^{l}T_j(k_j+1)+\frac{\_0^2}{2}$$

$$\leqslant\frac{\_0k}{2}(\frac{3}{2}+\frac{1}{2k})+\frac{\_0^2}{4},$$

若 $k=2$,由 $\_0\leqslant\frac{1}{2}$,得到 $x(n_3)\leqslant\frac{15}{16}X$;若 $k\in Z(3)$,由 $\_0\leqslant\_^*$,得到 $x(n_3)\leqslant V_0X$.这都与 $x(n_3)>VX$矛盾.

情况 **3** $k=2$且$\frac{1}{_0}<k$或 $k\in Z(3)$且$\frac{1}{_0}<\frac{1}{_^*}$.

我们首先断言在情况 3的条件下 $N_0\leqslant k-1$.实际上,当 $k=2$时,$\frac{1}{_0}<2$意味着 $N_0=[\frac{1}{\_0}]\leqslant1=k-1$.当 $k\in Z(3)$时,由 $_^*$定义,易证 $\_^*>\frac{1}{k}$,从而也有 $N_0\leqslant k-1$.由于 $N\leqslant N_0$,故只需考虑 $N\leqslant k-1$情形.

情况 **3.1** $N\leqslant\min\{k_1,k-1\}$.

$$x(n_3)\leqslant\_0X\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)\min\{\frac{1}{\_0},n_1-1-i+k_j$$

$$+\theta\}=\_0X\sum_{j=1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)\min\{\frac{1}{\_0},(k_j+1)-\sum_{m=n_1-1}^{i}$$

$$\lambda(m)\}\leqslant\_0X\sum_{j=1}^{l}T_j(\frac{1}{\_0}\sum_{i=n_1-1}^{n_2-2}\lambda(i)+(1-Z)\frac{1}{\_0}\lambda(n_2-1)+$$

$$Z\lambda(n_2-1)(k_j+1-\sum_{m=n_1-1}^{n_2-1}\lambda(m))+\sum_{i=n_2}^{n_3-1}\lambda(i)(k_j+1-$$

$$\sum_{i=n_1-1}^{n_2-1}\lambda(m)-\sum_{m=n_2}^{i}\lambda(m)))=\_0X\sum_{j=1}^{l}T_j(\sum_{i=n_1-1}^{n_2-1}\lambda(i)(\frac{1}{\_0}-Z\lambda$$

$$(n_2-1)-\sum_{i=n_2}^{n_3-1}\lambda(i))+(k_j+1-\frac{1}{\_0})Z\lambda(n_2-1)+\sum_{i=n_2}^{n_3-1}\lambda$$

$$(i)(k_j+1)-\frac{1}{2}(n_3-n_2)(n_3-n_2+1))\leqslant\_0X\sum_{j=1}^{l}T_j((1$$

$$-\theta+n_2-n_1)\frac{1-V}{\_0}+(k_j+1-\frac{1}{\_0})(\frac{V}{\_0}-N)+N(k_j+$$

$$1)-\frac{1}{2}N(N+1))\leqslant X((k+1)(1-V)\_0+V\sum_{j=1}^{l}T_j(k_j+$$

$$1)-V+N\_0-\frac{1}{2}N(N+1)\_0^2).$$

若 $N=0$,则由 V的定义,不难得到 $x(n_3)<VX$,矛盾.下面设 $1\leqslant N\leqslant k-1$,则

$$x(n_3)\leqslant X((k+1)(1-V)\_0+V\sum_{j=1}^{l}T_j(k_j+1)+$$

$$N\_0-\frac{1}{2}(N\_0)^2\frac{k}{k-1})\leqslant X((k+1)(1-V)\_0+V(\_1-$$

$1)+\frac{k-1}{2k})=X[(k+1)\__0+\frac{k-1}{2k}-((k+1)\__0+1-\__1)V]\leqslant VX$,矛盾.

情况 **3.2** $k-1\geqslant N\geqslant k_l+1$.

注意到 $k=2$ 时,不可能出现情况 3.2.故以下总假定 $k\geqslant 3$.且 $\frac{1}{\__0}\geqslant\frac{1}{\_^*}$,此时,存在 j_0, $1\leqslant j_0\leqslant l$,使得 $k_{j_0+1}\geqslant N\geqslant k_{j_0}+1$.若(4)式成立,则由(14)式,

$$x(n_3)=-\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)d(i-k_j)-\sum_{j=j_0+1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)d(i-k_j)=I_1+I_2,\qquad(16)$$

$$I_1=-\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_1-k_j-1}^{n_3-k_j-1}\lambda(i+k_j)d(i)=-\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_1-k_j-1}^{n_1-l}\lambda(i+k_j)d(i)-\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_2}^{n_3-k_j-1}\lambda(i+k_j)d(i)=I_{11}+I_{12}.$$

若(5)式成立,则由(15)式

$$x(n_3)\leqslant\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)\max\{0,-d(i-k_j)\}+\sum_{j=j_0+1}^{l}T_j\sum_{i=n_1-1}^{n_3-1}\lambda(i)\max\{0,-d(i-k_j)\}=\sum_{j=1}^{j_0}T_j\Big(\sum_{i=n_1-k_j-1}^{n_1-1}+\sum_{i=n_2}^{n_3-k_j-1}\Big)\lambda(i)\max\{0,-d(i-k_j)\}+I_2=I_{11}+I_2.\qquad(17)$$

下面估计 I_{11}、I_{13}、I_2.对于 I_2,类似于情况 3.1,可以证明

$$I_2\leqslant X\sum_{j=j_0+1}^{l}T_j((k+1)(1-V)+V(k_j+1)-\frac{V}{\__0}+\frac{k-1}{2k\__0}),$$

对于 I_{11}、I_{12}分别有

$$I_{11}\leqslant X\__0\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_1-k_j-1}^{n_1-1}\lambda(i)(\theta+n_1-1-i+k_j)=X\__0\sum_{j=1}^{j_0}T_j(\frac{1}{2}k_j(k_j+1)+\theta-\theta^2)\leqslant X\__0\sum_{j=1}^{j_0}T_j(\frac{1}{2}k_j(k_j+1)+\frac{1}{4}),$$

$$I_{12}\leqslant-\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_2}^{n_3-k_j-1}\lambda(i+k_j)d(i)=-X\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_2}^{n_3-k_j-1}\lambda(i+k_j)(V-(n_3-i)\__0)=-X\sum_{j=1}^{j_0}T_j\sum_{i=n_2+k_j}^{n_3-1}\lambda(i)(V-(n_3-i+k_j)\__0)=-X\sum_{j=1}^{j_0}T_j(-\frac{\__0}{2}N(N+1)+V(N-k_j)+\frac{\__0}{2}k_j(k_j+1)).$$

因此,若(4)式成立,由(16)式,并注意到(6)式,

$$x(n_3)\leqslant I_1+I_2\leqslant X\sum_{j=1}^{l}T_j((k+1)(1-V)+V(k_j+1)-\frac{V}{\__0}+\frac{k-1}{2k\__0})-X\sum_{j=1}^{j_0}T_j\{(k+1)(1-V)+V(k_j+1)-\frac{V}{\__0}+\frac{k-1}{2k\__0}-\frac{\__0}{4}-\frac{\__0}{2}N(N+1)+V(N-k_j)\}=X\{(k+1)\__0+\frac{k-1}{2k}+V(\__1-1-(k+1)\__0\}-X\sum_{j=1}^{j_0}T_j\{f(N)+(1-V)(k+\frac{1}{\__0}-N)\}\leqslant VX-X\sum_{j=1}^{j_0}T_jf(N),$$

其中 $f(N)=N+1-\frac{1}{2\__0}(1+\frac{1}{k})-\frac{\__0}{4}-\frac{\__0}{2}N(N+1)$.

下证 $f(N)\geqslant 0$.

首先我们断言 $f(k-1)\geqslant 0$.实际上,$f(k-1)=k-\frac{1}{2\__0}(1+\frac{1}{k})-\frac{\__0}{4}-\frac{\__0}{2}k(k-1)=\frac{1}{\__0}(\frac{k}{\__0}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})(\frac{1}{\__0})^2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}k(k-1))=\frac{1}{\__0}g(\frac{1}{\__0})\geqslant\frac{1}{\__0}\min\{g(\frac{1}{\_^*}),g(k-1)\}=0$.

下面证明当 $N\leqslant k-2$时,$f(N)\geqslant 0$,

$$f(N)=N+1+\frac{k}{2(k-1)}\__0N^2-\frac{1}{2\__0}(1+\frac{1}{k})-\__0N(N+1)+\frac{\__0}{2}(N(N+1)-\frac{k}{k-1}N^2-\frac{1}{2})=f_1(N)+\frac{\__0}{2}f_2(N).$$

注意到 $\frac{1}{__0}-1\leqslant N\leqslant\frac{1}{__0}$及 $1\leqslant N\leqslant k-2$且 $k\geqslant 3$,因此

$$f_1(N)\geqslant\min\{f_1(\frac{1}{\__0}),f_1(\frac{1}{\__0}-1)\}=\min\{\frac{1}{2\__0}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}),\frac{1}{2(k-1)}(\__0k+\frac{1}{\__0k}-2)\}\geqslant 0,$$

$$f_2(N)\geqslant\min\{f_2(1),f_2(k-2)\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{k-1}\geqslant 0,$$

故总有 $f(N)\geqslant 0$,从而 $x(n_3)\leqslant VX$,矛盾.

下面考虑(5)式成立的情况,由(17)方程式及上面的证明,并注意到条件(8)式.

$$x(n_3)\leqslant X\{(k+1)\__0+\frac{k-1}{2k}+V(\__1-1-(k+1))\__0\}+(-I_{12}),$$

考虑到当 $1\leqslant j\leqslant j_0$时,$\frac{1}{\__0}\geqslant N_\theta\geqslant N\geqslant k_{j_0}+1$,从而

$$-I_{12}\leqslant X\sum_{j=1}^{j_0}T_j(-\frac{\__0}{2}N(N+1)+N-k_j+\frac{k_j}{2})\leqslant X\sum_{j=1}^{j_0}T_j(-\frac{\__0}{2}N(N+1)+N)\leqslant X\sum_{j=1}^{l}T_j(-\frac{\__0}{2}N(N+1)+N)=X(-\frac{1}{2(k-1)}(N\__0)^2+N\__0)\leqslant\frac{k-1}{2k}X.$$

故 $x(n_3)\leqslant X((k+1)\__0+\frac{k-1}{k}+V(\__1-1-(k+1)\__0))\leqslant VX$,矛盾.

(下转第 189页 Continue on page 189)

其中

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}-\frac{15}{16}&0&0\\0&0&-\frac{15}{16}\\0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \|\Delta B\|\leqslant U=\frac{8}{5},$$

取 $W=I, V=\frac{1}{2}I, X=1, K=\frac{1}{4}I$,容易验证定理 1 的条件得到满足,由此在控制 $u=-\frac{1}{4}Ex(t)$ 的作用下,(9) 的闭环系统是渐近稳定的.

参考文献

1 刘永清, 温香彩. 广义系统的变结构控制. 广州: 华南理工大学出版社, 1997.

2 刘永清. 具时滞的不确定广义系统的鲁棒稳定性. 华南理工大学学报, 1996, 24 (5): 44~ 50.

3 张庆灵. 广义线性系统的鲁棒稳定性分析与综合. 控制理论与应用, 1999, 16 (4): 525~ 528.

4 梁家荣. 具输入饱和因子的广义系统的镇定. 自动化学报, 1999, 25 (4): 532~ 536.

5 Jin-Hoon Kim, Zeungnam. Bien robust stability of uncertain linear system with saturating actuators. IEEE Transaction on Automatic Control. 1994, 39 (1): 202~ 205.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 186页 Continue from page 186)

利用引理 2可以证明在定理 1与定理 2的相应条件下, (1) 式的零解是一致 (渐近) 稳定. 下面只给出定理 1与定理 2零解一致稳定性证明,关于一致渐近稳定性的证明,注意到在条件 (7)、(8) 式下引理 2的 $\gamma<1$, 从而可以仿文献 [5] 完成证明, 此处从略.

定理 **1** **2**的一致稳定性证明:

设 $\|x_{n_0}\|\leqslant X$,其中 $X\leqslant M(1+{}_0)^{-2k}$,由(4)式或(5)式,不难得到

$|x(i)|\leqslant(1+{}_0)^i\|x_{n_0}\|\leqslant(1+{}_0)^iX, i\in Z(n_0,n_0+2k)$.

下面证明当 $n\in Z(n_0+2k)$ 时, $\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n-1}\|_3$. 实际上,若 $|x(n)|\leqslant\|x_n\|_3$,则存在 $i_0\in Z(n-3k,n-1)$, 使得 $|x(n_0)|=\|x_n\|_3$, 从而 $\|x_n\|_3=|x(n_0)|\leqslant\|x_{n-1}\|_3$, 若 $|x(n)|=\|x_n\|_3$,则也有 $\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n-1}\|_3$. 若不然, $\|x_n\|_3>\|x_{n-1}\|_3$, 从而 $|x(n)|>\|x_{n-1}\|_3$,不妨设 $x(n)>0$,于是 $0<x(n)-x(n-1)=F(n-1,x_{n-1})$. 由(4)式或(5)式可知,存在 $n_1\in Z(n-k,n)$ 使得 $x(n_1-1)<0$,而 $x(m)\geqslant 0, m\in Z(n_1,n)$. 由引理 2, $x(n)\leqslant V\|x_{n_1-1}\|_2\leqslant\|x_{n_1-1}\|_2\leqslant\|x_{n-1}\|$. 矛盾. 从而当 $n\in Z(n_0+2k)$ 时,总有 $\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n-1}\|_3$ 成立,故 $|x(n)|\leqslant\|x_n\|_3\leqslant\|x_{n_0+2k}\|_3\leqslant(1+{}_0)^{2k}X, n\in Z(n_0+2k)$. 由此不难得到(1)的零解一致稳定性.

关于定理 **3**的证明: 只需注意在 $k\leqslant 2$或 $k_1\geqslant[\frac{1}{{}_0}]$或 $\frac{1}{{}_0}\geqslant k$ 的条件下,要保证引理 2成立,只需 ${}_1\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2k}$.

关于定理 **4**的证明: 在条件(11)下,定理 4相当于定理 3中 $k_1=k, {}_0=2, {}_1=2(k+1)$的特殊情况.

参考文献

1 庚建设. 线性时滞差分方程的稳定性. 见: 全国第五届常微分方程稳定性理论及应用学术会议论文集, 大连: 大连海事大学出版社, 1996.

2 Yoneyama T. On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations. J Math Anal Appl, 1987, 125 161~ 173.

3 Zhou Z, Zhang Q Q. Uniform stability of nonlinear difference systems. J Math Anal Appl, 1998, 225: 486 ~ 500.

4 陈武华. 一类非线性时滞差分方程的渐近稳定性. 应用数学, 1998, 11 (1): 55~ 60.

5 陈武华. 有限时滞差分方程的一致渐近稳定性. 广西民族学院学报 (自然科学版), 1999, 5 (3): 1~ 4.

(责任编辑: 黎贞崇)