DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.02.012

广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (2): 118~ 119

# 有放养的第II类功能性反应的捕食与被捕食非自治系统的周期解

# Periodic Solution of a Predator-Prey Nonautonomous System with II Type Functional Response and Graze

罗志宏

Luo Zhihong

(中山大学计算中心 广州市新港西路135号 510275)

(Computing Center, Zhongshan Univ., 135 West Xinganglu, Guangzhou, Guangdong, 510275, China)

摘要 应用不动点定理和 $V$-函数法,证明第II类功能性反应的捕食与被捕食(有放养的)非自治系统存在唯一的全局渐近稳定的正周期解.

关键词 功能性反应 不动点定理 $V$-函数法 周期解

中图法分类号 O 175

**Abstract** A predator-prey nonautonomous system with II type functional response and graze is discussed. The existence, uniqueness and global asymptotic stability of a positive periodic solution are proved by using the fixed point theorem and $V$-function method.

**Key words** functional response, fixed point theorem, $V$-function method, periodic solution

文献 [1] 对功能性反应的捕食与被捕食的自治系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) - h(x)y \\ \dot{y} = y(-d + e h(x) - U y) \end{cases}, \tag{1}$$

分类讨论了其解的一些性质,其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示被捕食者和捕食者种群在时刻 $t$ 的密度, $h(x)$ 表示捕食率; (1) 中所有参数均为正常数. 当 $h(x) = Tx/(1 + wx)$ 时, (1) 称为第 II 类功能性反应系统. 本文拟讨论相应的有放养的非自治系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a(t) - b(t)x) - T(t)xy/(1 + w(t)x) + h(t), \\ \dot{y} = y(-d(t) + e(t)T(t)x/(1 + w(t)x) - U(t)y), \\ x(0) > 0, \quad y(0) > 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中,所有系数均为连续,具正下界的 k 周期函数. 对于任何有界函数 $f(t)$,全文采用记号 $\bar{f} = \sup\{f(t)\}$, $\underline{f} = \inf\{f(t)\}$.

**引理 1** 设 $\bar{e}\bar{T} > \underline{w}\,\underline{d}$,且 $H_1$, $H_2$ 满足:

$$H_1 = (\bar{a} + \sqrt{\underline{b}\,\bar{h}})/\underline{b}, \quad H_2 > (\bar{e}\bar{T} - \underline{w}\,\underline{d})/\underline{w}\,\underline{U}, \tag{3}$$

则 $K = \{(x, y) \in R_+^2 \mid 0 < x \leqslant H_1, 0 < y \leqslant H_2\}$ 是系统 (2) 的最终有界集.

证 设 $(x(t), y(t))$ 为系统 (2) 的任一正初值解,与文献 [2] 引理 1 的证明相仿,可得 $R_+^2 = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ 是 (2) 的正向不变集. 故由 (2) 的第 1 式,有

$$\dot{x} \leqslant x(\bar{a} - \underline{b}x) + \bar{h}, \tag{4}$$

记 $x^* = (\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + 4\underline{b}\,\bar{h}})/2\underline{b}$,则由 $x(t) \geqslant H_1 (> x^*)$ 代入 (4),可得

$$\dot{x}(t) \leqslant H_1(\bar{a} - \underline{b} H_1) + \bar{h} \triangleq -\lambda_1 < 0,$$

故存在 $T_1 \geqslant 0$,使当 $t \geqslant T_1$ 时 $0 < x(t) \leqslant H_1$.

又由 (2) 的第 2 式,有

$$\dot{y} \leqslant y(\bar{e}\bar{T}/\underline{w} - \underline{d} - \underline{U}y),$$

则当 $y(t) \geqslant H_2$ 时,有

$$\dot{y}(t) \leqslant H_2(\bar{e}\bar{T}/\underline{w} - \underline{d} - \underline{U}H_2) \triangleq -\lambda_2 < 0,$$

所以存在 $T_2 \geqslant T_1$,使当 $t \geqslant T_2$ 时 $0 < y(t) \leqslant H_2$.

由上可知,存在 $T_2 \geqslant 0$,使当 $t \geqslant T_2$ 时 $0 < x(t) \leqslant H_1$, $0 < y(t) \leqslant H_2$,即 $K$ 是系统 (2) 的最终有界集.

**定义** 若存在紧区域 $S \subset R_+^2$,使得对 (2) 的满足正初值的任何解 $Z(t) = (x(t), y(t))$,存在 $T \geqslant 0$,当 $t \geqslant T$ 时均有 $Z(t) \in S$,则称 (2) 是一致持久的.

**引理 2** 设条件 (3) 成立,且 $Z_1$, $Z_2$ 满足:

1999-11-08收稿.

$$\left.\begin{array}{l} 0 < Z_1 < (\underline{a} + \sqrt{\underline{a}^2 + 4(\bar{b} + \bar{T} H_2)\underline{h}})/2(\bar{b} + \bar{T} H_2) \\ 0 < Z_2 < (\underline{e}\,\underline{T} Z_1 - (1 + \bar{w} Z_1)\bar{d})/\bar{U}(1 + \bar{w} Z_1) \end{array}\right\}, \quad (5)$$

则 $S = \{(x, y) \in R_+^2 \mid Z_1 \leqslant x \leqslant H_1, Z_2 \leqslant y \leqslant H_2\}$是 (2)的最终有界集和不变集,从而(2)是一致持久的.

证　首先,由引理 1知,存在 $T_2 \geqslant 0$,使当 $t \geqslant T_2$ 时有 $0 < x(t) \leqslant H_1, 0 < y(t) \leqslant H_2$. 于是,由(2)的第 1式,有

$$\dot{x} \geqslant x(\underline{a} - \bar{b} x - \bar{T} H_2 x) + \underline{h},$$

记 $\__1 = \min\{Z_1(\underline{a} - \bar{b} Z_1 - \bar{T} H_2 Z_1) + \underline{h}, \underline{h}\}$,则由条件(5)知,当 $0 < x(t) \leqslant Z_1$ 时有

$$\dot{x}(t) \geqslant \__1 > 0,$$

故存在 $T_3 \geqslant T_2$,使当 $t \geqslant T_3$ 时 $x(t) \geqslant Z_1$.

因为 $h(x) = x/(1 + \bar{w} x)$ 是 $x$ 的递增函数,故对于 $x \geqslant Z_1$ 有 $h(x) \geqslant h(Z_1)$,所以当 $t \geqslant T_3$ 时,由(2)的第 2式,有

$$\dot{y} \geqslant y(\underline{e}\,\underline{T} Z_1/(1 + \bar{w} Z_1) - \bar{d} - \bar{U} y),$$

记 $\__2 = Z_2(\underline{e}\,\underline{T} Z_1/(1 + \bar{w} Z_1) - \bar{d} - \bar{U} Z_2)$,则由条件(5)知,对于 $0 < y(t) \leqslant Z_2$ 有 $\dot{y}(t) > 0$,且 $\dot{y}(t)|_{y = Z_2} \geqslant \__2 > 0$.因此,存在 $T_4 \geqslant T_3$,使当 $t \geqslant T_4$ 时 $y(t) \geqslant Z_2$.

综上所述,若初值 $Z_0 = Z(0) = (x_0, y_0) \in S$,则可取 $T_i = 0 (i = 1, \cdots, 4)$,于是,对于 $t \geqslant 0$, $Z(t; 0, Z_0) \in S$,即 $S$ 是(2)的最终有界集和不变集;系统(2)是一致持久的.

**定理 1**　若周期系统(2)满足条件(3)和(5),则(2)至少有一个正的周期解.

证　设 $Z(t, Z_0)$ 是系统(2)满足初值 $Z_0 \in R_+^2$ 的解,则由引理 1和引理 2的证明过程可知,若(2)的解 $Z(t, Z_0)$ 的初值 $Z_0 = Z(0) \in S$,则对于 $t \geqslant 0$, $Z(t, Z_0) \in S$;因此 Poincare′映射

$$A: Z_0 \mapsto Z(k, Z_0);$$

将有界凸闭集 $S$ 映入自身.由解对初值的连续依赖性知算子 $A$ 是连续的,故根据 Brouwer不动点定理, $A$ 至少有一个不动点 $\tilde{Z} \in S$,所以 $Z(t, \tilde{Z})$ 是(2)的正 k 周期解.

**定理 2**　设系统(2)满足条件(3)和(5)以及

$$\left.\begin{array}{l} \underline{b} + \underline{h}/H_1^2 > \bar{e}\bar{T} + \bar{T}\bar{w} H_2 \\ \underline{U} > \bar{T} + \bar{T}\bar{w} H_1, \end{array}\right\} \quad (6)$$

则(2)存在唯一的全局渐近稳定的正周期解.

证　由定理 1知,系统(2)至少存在一个正的 k 周期解 $(x(t), y(t))$.现设 $(u(t), v(t))$ 是系统(2)具正初值的任一解,则由引理 1和引理 2的证明过程知,可不妨设 $(x(t), y(t)), (u(t), v(t)) \in S, t \geqslant 0$.

考虑 Liapunov函数:

$$V(t) = |\ln u(t) - \ln x(t)| + |\ln v(t) - \ln y(t)|,$$

则可得 $V(t)$ 沿系统(2)的上右导数有估计式:

$$D^+ V(t) = \mathrm{sgn}(u(t) - x(t))(\dot{u}(t)/u(t) - \dot{x}(t)/x(t)) + \mathrm{sgn}(v(t) - y(t))(\dot{v}(t)/v(t) - \dot{y}(t)/y(t)) \leqslant -(\underline{b} + \underline{h}/H_1^2 - \bar{e}\bar{T} - \bar{T}\bar{w} H_2)|u(t) - x(t)| - (\underline{U} - \bar{T} - \bar{T}\bar{w} H_1)|v(t) - y(t)| \leqslant -V(|u(t) - x(t)| + |v(t) - y(t)|) < 0,$$

其中 $V = \min\{(\underline{b} + \underline{h}/H_1^2 - \bar{e}\bar{T} - \bar{T}\bar{w} H_2), (\underline{U} - \bar{T} - \bar{T}\bar{w} H_1)\} > 0$, (由(6)).于是,由微分不等式定理,得

$$V(t) + V\int_0^t (|u(f) - x(f)| + |v(f) - y(f)|)\,df \leqslant V(0), t \geqslant 0.$$

因此,有

$$\int_0^{+\infty} (|u(f) - x(f)| + |v(f) - y(f)|)\,df \leqslant +\infty.$$

由于 $(x(t), y(t)), (u(t), v(t))$ 均在 $[0, +\infty)$ 上有界,故由系统(2)知其导函数也在 $[0, +\infty)$ 上有界,所以 $|u(t) - x(t)| + |v(t) - y(t)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

因此,由 Barbalat定理[3]知:

$$\lim_{t \to +\infty} |u(t) - x(t)| = 0, \lim_{t \to +\infty} |v(t) - y(t)| = 0.$$

从而,系统(2)是全局渐近稳定的,且其周期解是唯一的.

## 参考文献


1 陈兰荪,陈　键.非线性生物动力系统.北京:科学出版社, 1993. 62~ 69.

2 Zeng G Z, Chen L S, Chen J F. Persistence and periodic oribits for two-species nonautonomous diffusion Lotka-Volterra models. Mathl Comput Modelling, 1994, 20(12): 69~ 80.

3 Barbalat I. Systems d'equations differentielle d'oscillations nonlineaires. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1959, 4: 261 ~ 270.


(责任编辑:黎贞崇)