DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.02.011
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (2): 115~ 117

3p阶 Frobenius群的非弱 3-*DCI*性*
The Nature of Non-weak 3-*DCI* in Frobenius Group with 3p Order

徐尚进
Xu Shangjing

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路10号 530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要 构造 3p阶 Frobenius群的 2个非 CI的 3元生成子集,从而说明这类 Cayley图是非弱 3-DCI的.
关键词 Cayley图 Frobenius群 生成子集
中图法分类号 O 152.1
Abstract Two three-element generating subsets being non-CI-subset for Frobenius group were given, so that Cayley graph of the group is non-weak 3-DCI-group.
Key words Cayley graph, Frobenius group, generating subset

1 记号与定义

记号 1 设 G是有限群,记:

(i) $G^{\#} = G \backslash \{1\}$;

(ii) $g \in G$, $R(g)$: $x \mapsto xg$, $x \in G$, $R(G) = \{R(g) | g \in G\}$, $R(S) = \{R(s) | s \in S\}$.

定义 1 设 G是有限群,任取 $S \subseteq G^{\#}$,则可构造著名的 G关于 S的 Cayley图 $X = \mathrm{Cay}(G, S)$:

$V(X) = G, E(X) = \{(g, sg) | g \in G, s \in S\}$.

性质 1 Cayley图是点传递图 (因为 $R(G) \subseteq \mathrm{Aut}(X)$),且

Cayley图 $\mathrm{Cay}(G, S)$是连通的当且仅当 $\langle S \rangle = G$.

定义 2 (i) 在 $G^{\#}$ 的子集中利用群自同构定义一种等价关系:

$S, T \subseteq G^{\#}$, S与 T是群同构的 $\Leftrightarrow \exists\ \mathrm{T} \in \mathrm{Aut}(G)$, $S^{\mathrm{T}} = T$.

这个关系称为群同构关系,所得到的等价类称为群同构类.

(ii) 在 $G^{\#}$ 的子集中通过图同构也可定义另一种等价关系:

$S, T \subseteq G^{\#}$, S与 T是图同构的 $\Leftrightarrow \mathrm{Cay}(G, S) \cong \mathrm{Cay}(G, T)$.

这个关系称为图同构关系,在本文中记为 ~ ,所得到的等价类称为图同构类.

1999-11-22收稿, 1999-12-20修回。
* 国家自然科学基金资助项目 (项目编号: 19761001)。

显然, $G^{\#}$ 中 2个子集如果是群同构的则必然也是图同构的,反之不一定成立.于是图同构类通常是若干个群同构类的并集.因此,可定义群的 CI-子集.

定义 3 设 G是有限群:

(i) 设 $S \subseteq G^{\#}$,如果 S所在的图同构类恰好也是群同构类,则称 S是 G的 CI-子集.事实上 S是 CI-子集的定义也可以等价表述为:

$\forall\ T \subseteq G^{\#}$, $\mathrm{Cay}(G, S) \cong \mathrm{Cay}(G, T) \Rightarrow \exists\ \mathrm{T} \in \mathrm{Aut}(G)$, $S^{\mathrm{T}} = T$.

(ii) 如果 $\forall\ S \subseteq G^{\#}$, S是 CI-子集,则称 G是 DCI-群.

(iii) 如果 $\forall\ S \subseteq G^{\#}$, $|S| \leqslant m$, S是 CI-子集,则称 G是 m-DCI-群.

(iv) 如果 $\forall\ S \subseteq G^{\#}$, $|S| \leqslant m$, $\langle S \rangle = G$, S是 CI-子集,则称 G是弱 m-DCI-群.

文中所引用的其他一些记号若未加说明或有关群的浅显结论均出自文献 [1], 仅此说明.

由于 DCI-群已比较稀少[2~5],人们往往着重寻找 m-DCI群[6~8]甚至弱 m-DCI群[8~10].

当 m较小时,弱 m-DCI性较容易解决.事实上,由 Babai引理,当 m小于群阶的最小素因子时,该群一定是弱 m-DCI的 [引理 4的推论].但当 m稍大一些时,问题则不然.本文构造了 3p阶 Frobenius群的一个非 CI的 3元生成子集 [定理 1],从而说明这类 Cayley图是非弱 3-DCI的.

2 主要引理

引理 1 设 G为 3p阶 Frobenius群, 即

$G=\langle a,b \mid a^3=b^p=1, a^{-1}ba=b^r\rangle$,(其中 p 是大于 3的素数,且 $r>1, r^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$,则

(i) $b^j a^i = a^i b^{jr^i}$;

(ii) $(a^{i_1}b^{j_1})(a^{i_2}b^{j_2}) = a^{i_1+i_2}b^{r^{i_2}j_1+j_2}$;

(iii) $G'=\langle b\rangle$;

(iv) $\forall k, (ab^j)^k = a^k b^{j\frac{r^k-1}{r-1}}$;

(v) $\forall i, |ab^i| = |a^2b^i| = 3$.反之,$G$中所有 3阶元均形如 ab^i 或 a^2b^i.

证 (i) 由 $a^{-1}ba=b^r$,则 $a^{-i}ba^i=b^{r^i}$,即 $ba^i = a^ib^{r^i}$,

而 $b^ja^i = b^{j-1}ba^i = b^{j-1}a^ib^{r^i} = b^{j-2}a^ib^{2r^i}=\cdots = a^ib^{jr^i}$.

(ii) 由(i), $b^{j_1}a^{i_2} = a^{i_2}b^{r^{i_2}j_1}$,即得(ii);

(iii) 由 $b^{r-1}=[b,a]\in G'$,显然有 $\langle b\rangle = \langle b^{r-1}\rangle\leqslant G'$.

反之,$G/\langle b\rangle$ 为 3阶交换群,从而又有 $G'\leqslant\langle b\rangle$.

(iv) 用归纳法证:当 $k=1$时显然成立,则

$(ab^j)^{k+1} = (ab^j)(a^kb^{j\frac{r^k-1}{r-1}}) = a(b^ja^k)b^{j\frac{r^k-1}{r-1}} = a^{1+k}b^{jr^k}b^{j\frac{r^k-1}{r-1}} = a^{k+1}b^{j\frac{r^{k+1}-r^k+r^k-1}{r-1}} = a^{k+1}b^{j\frac{r^{k+1}-1}{r-1}}$.

(v) $\forall i, (ab^i)^3 = a^3b^{i\frac{r^3-1}{r-1}} = 1$.

由引理 1之(ii),显然有:

推论 条件同引理 1:

(i) $(ab^i)(a^kb^j) = a^{k+1}b^{r^ki+j}$, $(a^2b^i)(a^kb^j) = a^{k-1}b^{r^ki+j}$;

(ii) $b^{r+1}a = ab^{-1}$;

(iii) $ba^2 = a^2b^{-1-r}$, $b^{r+1}a^2 = a^2b^{-r}$.

$(k=0,1,2.\quad i,j=0,1,\cdots,p-1)$

证 (i) 由引理 1之(ii)直接得;

(ii) 仍由引理 1之(ii),先得 $b^{r+1}a = ab^{r^2+r}$,

都有 $p\mid(r^2+r+1)\Rightarrow r^2+r\equiv -1(\mathrm{mod}\ p)$即得;

(iii) 同(ii)理,$r^2\equiv -1-r(\mathrm{mod}\ p)$, $r^2+1\equiv -r(\mathrm{mod}\ p)$,则

$ba^2 = a^2b^{r^2} = a^2b^{-1-r}$, $b^{r+1}a^2 = a^2b^{r^3+r^2} = a^2b^{1+r^2} = ab^{-r}$.

证毕.

引理 2 条件同引理 1,若取定 $u(0\leqslant u<p)$,及 $v(1<v<p)$,

定义映射 $\tau: a^ib^j\mapsto (ab^u)^i(b^v)^j (i=1,2, j=0,1,\cdots,p-1)$.

则映射 $a\in\mathrm{Aut}(G)$.

证 (i) 由引理 1之(iv),$|ab^u|=3$及 $|b^v|=p$,即 ab^u, b^v 仍为群 G的生成元.

(ii) 由引理 1之(i),有 $b^va = ab^{vr}$,于是 $(ab^u)^{-1}b^v(ab^u) = b^{-u}a^{-1}ab^{vr}b^u = b^{-u}b^{vr}b^u = (b^v)^r$.即 a, b的象 ab^u, b^v 仍满足生成关系,说明 $\tau\in\mathrm{Aut}(G)$,证毕.

引理 3 条件同引理 1,不存在 a到 $a^2b^i(i=0,1,\cdots,p-1)$的自同构映射.

证 用反证法,假设 $\exists\tau\in\mathrm{Aut}(G)$, $\tau(a)=a^2b^i$,并由 $|\tau(b)|=|b|=p$,故 $\exists j, \tau(b)=b^j$,但 $\tau(a^{-1})\tau(b)\tau(a) = (b^{-i}a)b^j(a^2b^i) = b^{-i}a(b^ja^2)b^i = b^{jr^2}\neq\tau(b^r)$.

即 τ不保持生成关系,与 $\tau\in\mathrm{Aut}(G)$矛盾.证毕.

引理 4(Babai) 设 $S\subseteq G^\#$, $X=\mathrm{Cay}(G,S)$, $A=\mathrm{Aut}(X)$,则

S是 CI-子集 $\Leftrightarrow\forall\sigma\in\mathrm{Sym}(G)(\sigma^{-1}R(G)\sigma\leqslant A)$,必

$\exists\tau\in A, \sigma^{-1}R(G)\sigma = \tau^{-1}R(G)\tau$.

推论 条件同引理 1,则 G的 2元生成子集均是 CI-子集.

证 设 $\langle S\rangle = G, |S|=2$.由于奇数阶 Hall子群都是共轭的[11],故只需证 $R(G)$是 $A=\mathrm{Aut}(X)$的 Hall子群,即只需证 $R(G)$的阶 $3p$与 A的点稳定子群 A_1的阶互素.

反证法 若 $(3p,|A_1|)\neq 1$,则 A_1中必含 3阶元或 p阶元,记为 τ,由 $|S|=2$, τ必不动 S中所有点,但 $\langle S\rangle = G$,则 τ也不动 G中所有点,矛盾.证毕.

3 主要结论

由引理 4之推论,$3p$阶 Frobenius群是弱 2-DCI群.但下述定理却说明它不是弱 3-DCI的:

定理 1 设 G为满足引理 1条件的 $3p$阶 Frobenius群,特取 $S=\{a,ab,ab^{r+1}\}$, $T=\{a^2,a^2b,a^2b^{r+1}\}$,记 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$, $Y=\mathrm{Cay}(G,T)$,则

$\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,T)$,但不存在 $\tau\in\mathrm{Aut}(G)$,使 $S^\tau = T$.

证 首先,群 G的元素(即 Cayley图的点)可划分为 3种情形: $b^i; ab^i; a^2b^i (i=0,1,\cdots,6)$.

为证 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,T)$,定义 $\sigma\in\mathrm{Sym}(G)$如下:

$\sigma(b^i)=b^i, \sigma(ab^i)=a^2b^i, \sigma(a^2b^i)=ab^{i-r} (i=0,1,\cdots,6)$.

往证在 σ的作用下图 $\mathrm{Cay}(G,S)$的边映成图 $\mathrm{Cay}(G,T)$的边.

事实上,由 S的构成及定义 1,图 $X=\mathrm{Cay}(G,S)$的边有 3种生成形式,即:

$(g,ag),(g,(ab)g),(g,(ab^{r+1})g)\quad(g\in G)$.

而 g 可分别取为: $b^i;ab^i;a^2b^i\ (i=0,1,\cdots,6)$,

于是由引理 1的推论, $E(X)$ 可细分为如下 9种:

(i) (b^i,ab^i); (ii) (ab^i,a^2b^i); (iii) (a^2b^i,b^i); (iv) (b^i,ab^{1+i}); (v) (ab^i,a^2b^{r+i}); (vi) (a^2b^i,b^{-1-r+i}); (vii) (b^i,ab^{r+1+i}); (viii) (ab^i,a^2b^{-1+i}); (ix) (a^2b^i,b^{-r+i}).

同理,由 T 的构成,图 $Y=\mathrm{Cay}(G,T)$ 的边 $E(Y)$ 也可细分为如下 9种:

(i) (b^i,a^2b^i); (ii) (ab^i,b^i); (iii) (a^2b^i,ab^i);

(iv) (b^i,a^2b^{1+i}); (v) (ab^i,b^{r+i});

(vi) (a^2b^i,ab^{-1-r+i}); (vii) (b^i,a^2b^{r+1+i});

(viii) (ab^i,b^{-1+i}); (ix) (a^2b^i,ab^{-r+i}).

为证 $\sigma(E(X))\subseteq E(Y)$,仍细分 9种情形讨论:

(i) $\sigma((b^i,ab^i))=(b^i,a^2b^i)$ 属 $E(Y)$ 之 (i);

(ii) $\sigma((ab^i,a^2b^i))=(a^2b^i,ab^{i-r})$ 属 $E(Y)$ 之 (ix);

(iii) $\sigma((a^2b^i,b^i))=(ab^{i-r},b^i)$ 属 $E(Y)$ 之 (v);

(iv) $\sigma((b^i,ab^{1+i}))=(b^i,a^2b^{1+i})$ 属 $E(Y)$ 之 (iv);

(v) $\sigma((ab^i,a^2b^{r+i}))=(a^2b^i,ab^i)$ 属 $E(Y)$ 之 (iii);

(vi) $\sigma((a^2b^i,b^{-1-r+i}))=(ab^{i-r},b^{-1-r+i})$ 属 $E(Y)$ 之 (viii);

(vii) $\sigma((b^i,ab^{r+1+i}))=(b^i,a^2b^{r+1+i})$ 属 $E(Y)$ 之 (vii);

(viii) $\sigma((ab^i,a^2b^{-1+i}))=(a^2b^i,ab^{-1-r+i})$ 属 $E(Y)$ 之 (vi);

(ix) $\sigma((a^2b^i,b^{-r+i}))=(ab^{i-r},b^{-r+i})$ 属 $E(Y)$ 之 (ii);

至此 $\sigma(E(X))\subseteq E(Y)$,验证完毕,故有 $\mathrm{Cay}(G,S)\cong\mathrm{Cay}(G,T)$.

最后由引理 3,显然不存在 $\tau\in\mathrm{Aut}(G)$,使 $S^\tau=T$!

证毕.

注意 $\{a,ab,ab^{r+1}\}$ 与 $\{a^2,a^2b,a^2b^{r+1}\}$ 都是 $3p$ 阶 Frobenius群 G 的 3元生成子集,但由定理 1,它们却不是 CI-子集,因此,本文的主要结论表明: $3p$ 阶 Frobenius群并不是弱 3-DCI 的.

参考文献

1 徐明曜. 有限群导引. 北京: 科学出版社, 1999.

2 Xu Mingyao. Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs. Discrete Math, 1998, 182: 309~319.

3 Muzychuk M. Adam's conjecture is true in the square-free cass. J Combin Theory (A), 1995, 72: 118~134.

4 Muzychuk M. On adam's conjecture for circulant graphs. Disc Math, 1997, 167/168: 497~510.

5 Li Caiheng. Isomorphisms of finite cayley graphs. [Ph D Thesis]. University of Western Australia, 1997.

6 孙 良. 无向循环图的同构. 数学年刊, 1988, 5 (9A): 567~574.

7 Ma Haicheng. On isomorphisms of Cayley digraphs on dicyclic groups. Australasian Journal of Combinatorics, 1997, 16: 189~194.

8 方新贵. 有限交换 2-DCI群的刻画. 数学杂志, 1988, 8: 315~317.

9 Fang Xingui, Xu Mingyao. On the isomorphisms of cayley graphs of small valency. Algebra Colloq, 1994, 1 (1): 67~76.

10 黄琼湘. Cayley图的同构分解及弱 DCI 子集的充要条件. 数学研究与评论, 1998, 18 (2): 281~284.

11 Gross F. Conjugacy of odd order hall subgroups. Bull London Math Soc, 1987, 19: 311~319.

(责任编辑: 邓大玉)

简单验血可发现早期癌症

据《科学时报》2000年5月2日报道,一种简称为 TSGF的肿瘤相关物联合检测试剂盒已被批准为国家体外检测试剂第一类。它的出现,使癌症早期广谱检测成为可能。据了解,该产品是国家火炬计划项目最新科技成果之一,也是迄今为止获国家药品监督管理局批准的惟一的第一类肿瘤检测试剂。

恶性肿瘤是威胁人类健康的最大顽疾之一,能否在癌症的早期发现其症状并及时加以治疗,是人们梦寐以求的目标。福建新大陆生物技术有限公司在国际上已有的肿瘤相关物质识别和肿瘤检测技术研究的基础上,邀请数批华裔科学家合作,经过6年的研究,确定了数种国际公认的与多种恶性肿瘤相关的物质,并研制成功与这些物质共同作用的特定显色剂和分析技术,实现了在同一检测体系下对多种肿瘤相关物质检测的可能,使医生通过简单的验血就可以发现多种癌症。经过北京、上海、山东、湖南、江苏等逾百家三甲医院的数万例临床验证,TSGF的检测灵敏度和特异性分别高达86%和97%,临床医生和许多肿瘤专家认为,TSGF检测试剂对早期广谱癌症检测具有巨大的应用价值,适用于恶性肿瘤临床早期辅助检查、癌症预防普查、癌症患者病情监测和术后放化疗后的动态观察。该试剂盒的研制成功,标志着恶性肿瘤的早期诊断技术取得了重大的突破性进展。并使我国的肿瘤早期检测试剂研究开发进入了国际领先水平。