DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2000.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 2000, 7 (1): 17~ 19

基于代数神经网络的多元多项式不可约判定及学习算法

Irreducibility Testing and Learning Algorithms of Multivariate Polynomials Based on Algebra Neural Networks Model

周永权

Zhou Yongquan

(广西民族学院数学与计算机科学系 南宁市西乡塘 530006)

(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Univ. for Nationalities, Xixiangtang, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要 把感知器作为数学模型，充分利用神经元的运算特性，以二元多项式近似求根神经网络模型为基础，设计一类多元多项式不可约判定的神经网络模型，它是单输入多输出三层前向神经网络，给出神经网络学习算法，这种学习算法在 p-adic意义下，通过调整隐层与输出层的权值 $C_{i,j}$ 完成学习，直到 $e \geqslant \deg_y(F)+1$ 步，可确定出多元多项式不可约，通过算例表明，该算法有效，相比传统的判定算法，可操作性强。

关键词 多元多项式 代数神经网络 不可约 学习算法

中图法分类号 TP 183

Abstract With compute character of neural and based on the neural networks model of approximate solve roots, a kind of three layers forward algebra neural networks with single input and many outputs are designed, which can be applied to polynomials irreducibility testing. Neural networks learning algorithm was designed. Through the learning algorithm, we have tested $F(x,y)$ irreducibility.

Key words multivariate polynomials, algebra neural networks, irreducibility, learning algorithm

感知器是在 MP- 模型基础上建立起来单细胞神经网络的信息处理器，作为数学模型，它的基本特征是神经细胞的工作特性，感知器是多输入单输出的运算系统，表示一个神经元的运算特性，从这一特性出发，文献 [1] 给出了数学神经网络，应用数学方法研究神经网络插值机理及学习机理，在此工作基础上，文献 [2] 对数学神经元作了一些限制，对神经元的激发函数，学习目标与神经元构成的网络 3个方面进行推广，给出了代数神经元与代数神经网络模型，设计出一类二元多项式的近似求根神经网络模型，作为代数神经网络的应用，本文研究基于代数神经网络的多元多项式的不可约判定及学习算法，它的意义在于经常出现在通信信号编码等领域，其地位十分重要，对于这个问题，虽然代数理论上有一些判定算法[3,4]，但这些算法具体操作较为困难，尤其判定一次数较高多元多项式不可约确非易事，甚至难于下手。其次，所给出的算法不是并行算法，不能直接用 VLSI实现，因而处理速度受到很大的限制。因此，研究基于代数神经网络的多项式不可约判定，是一项很有意义的工作，由于任意多元多项式不可约判定都可归结为二元多项式不可约判定问题，以下仅考虑二元情形。

1 多元多项式不可约判定的神经网络理论基础

通常根据人们思维的习惯，判定一多元多项式不可约，期望从对应的一元多项式入手，通过学习提升手段到多元多项式的情形，实现对多元多项式不可约的判定，这样一来，在多项式环 $C[y][x]$ 中，对任意一二元多项式的根，都可通过二元多式近似求根神经网络模型[5]对权系数值的学习，都可得到所给多项式 $F(x,y)$ 每一个根的近似表达式：

$$F_i(x,y) = x + C_{i,0} + C_{i,1}y + C_{i,2}y^2 + \cdots \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{1}$$

引理 1 多项式 $F(x,y)$ 的根都是形如 $x-$

1999-08-25收稿，1999-10-15修回。

$\varphi(y)$ 的形式,都可通过二元多项式近似求根神经网络模型学习可得到每一 $F_i(i=1,2,\cdots,n)$ 直到 y^e 项,其中: $e=\deg_y(F)$.

引理 **2**[5] 设 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 定义如(1)式,若

$$G=F_1F_2\cdots F_m=x^m+g_{m-1}(y)x^{m-1}+\cdots+g_0(y),$$

则: $C_{1,k}+C_{2,k}+\cdots+C_{m,k}=0$ 对 $\forall k\geqslant e=\deg_y(F)$. (2)

以下为了叙述方便,我们把(2)式称为权系数间的整合关系,它为多元多项式的神经网络不可约判定奠定了理论基础.

但在具体实际应用中,只要当学习次数 $k>e=\deg_y(F)$,我们以 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 的系数为样本,构作矩阵:

$$M_n^e=\begin{bmatrix} C_{1,e+1} & C_{1,e+2} & \cdots \\ C_{2,e+1} & C_{2,e+2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n,e+1} & C_{n,e+2} & \cdots \end{bmatrix}. \tag{3}$$

定理 1 若 $\mathrm{rank}(M_n^e)=n-1$,则 $F(x,y)$ 在复数域 C 上不可约.

2 多元多项式不可约判定的代数神经网络模型

根据引理 1,我们可得到每一 $F_i(x,y)(i=1,2,\cdots,\deg_x(F))$,直到 y^k 项,其中: $k>e=\deg_y(F)$.现考察图 1的神经网络,设神经元: $f_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 及 $f_{n+1}^{(j)}(j=e+1,\cdots,2e)$的传递函数为: φ及 $\varphi_{n+1}^{(j)}$; f_0 至 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的连结权为 1,f_i 至 $f_{n+1}^{(j)}$的连结权为: $C_{i,j}(i=1,2,\cdots,n,j=e+1,\cdots,2e)$,$y$ 对 f_0的输入权为 1,f_i 到 $f_{m+1}^{(j)}$连结权分别为: $y^{e+1},y^{e+2},\cdots$ 项的系数,φ_0与 $\varphi_{n+1}^{(k)}$均取恒等函数: $\varphi_0(u)=\varphi_{n+1}^{(j)}(u)=u$,这时该网络输出为:

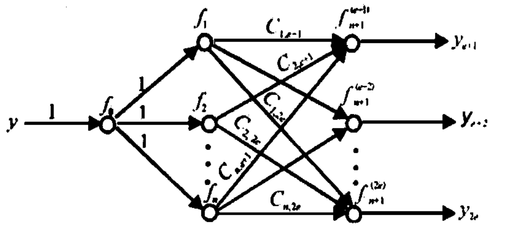

图 1 二元多项式不可约判定神经网络模型

Fig. 1 Binary polynomials irreducibility of neural network model

这时,该网络的向量输出为:

$$F(y)=(y_{e+1},y_{e+2},\cdots,y_{2e})=(\sum_{i=e+1}^{2e}\varphi(y)C_{1,i},\sum_{i=e+1}^{2e}\varphi(y)C_{2,i},\cdots,\sum_{i=e+1}^{2e}\varphi(y)C_{n,i}), \tag{4}$$

特别在(4)式中,取: $\varphi(y)=y^{e+i-1}(i=1,2,\cdots,e+1)$时,该网络输出的分量 y_k 都是在相同基$\{y^e,y^{e+1},\cdots,y^{2e}\}$下,对应权基阵记为:

$$M_n^{2e}=\begin{bmatrix} C_{1,e+1} & C_{1,e+2} & \cdots & C_{1,2e} \\ C_{2,e+1} & C_{2,e+2} & \cdots & C_{2,2e} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ C_{n,e+1} & C_{n,e+2} & \cdots & C_{n,2e} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

一般情况下,通过二元多项式近似求根网络学习 $k=2e$次,足以说明问题,由定理 1知,$F(x,y)$是否可约,仅须考察 $\mathrm{rank}(M_n^{2e})$是否为 $n-1$.

3 多元多项式不可约判定神经网络学习算法

从二元多项式近似求根神经网络模型可看出,随着学习次数的增加,该网络的输出实际上确定了一二元多项式的根关于变元 y 的幂级数展开式的近似表达式:

$$F_i'(x,y)=x-C'_{i,0}+C'_{i,1}y+C'_{i,2}y^2+\cdots, \tag{6}$$

由引理 1知,当 $k\geqslant e$,通过对权系数 $C'_{i,j}$的学习,使得 $F_i'(x,y)$逐次逼近目标 $F_i(x,y)$,从而达到对多元多项式不可约的判定.首先,令 $y=0$,则(6)式变为:

$$F_i'(x,0)=x-C'_{i,0},\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{7}$$

于是,我们通过下面学习算法可确定(6)的权系数值的变化,其权值调整学习算法描述如下:

step 1.对 $l=0$到 $n-1$;

step 2.修正权值:

$$w_i^{(l)}=\frac{C'^{l}_{i,0}}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(C'_{i,0}-C'_{j,0})},(i=1,2,\cdots,n).$$

引理 **3**[5] 设待判定多项式为 $F(x,y)$,通过二元多项式近似求根的神经网络模型学习 k次,可得到多项式集$\{F'^{(k)}_1,F'^{(k)}_2,\cdots,F'^{(k)}_n\}$,使得在 p-adic 意义下满足:

$$F(x,y)=F'^{(k)}_1,F'^{(k)}_2,\cdots,F'^{(k)}_n \quad (\mathrm{mod}\, y^{k+1}),$$

$$F'^{(k)}_i=F'^{(0)}_i \quad i=1,2,\cdots,n.$$

算法描述如下:

算法 **1**:

Step 1: 学习步长: $e>\deg_y(F)$ 给定,据 $n_0=\deg_x(F)$初始化隐单元的个数 $n=n_0$,网络权值的初始值为 $C_{i,0}(i=1,2,\cdots,n)$,置 $y=0$,则网络的初始结构为:

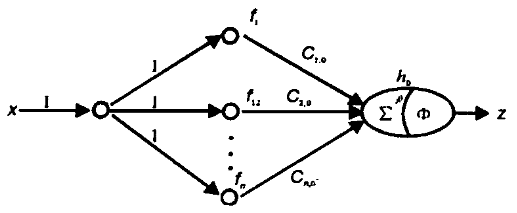

图 2 一元 n 次多项式代数神经网络结构模型

Fig. 2 Univariate polynomials of algebra neural network model

Step 2 构造 $F_i(i=1,2,\cdots,n)$.

在图 2网络的基础上,根据目标多项式 $F(x,y)$ 的变元及阶数增加输入节点,隐节点的数目,将该网络扩充为二元多项式近似求根网络的结构[5],再由引理 1及权值学习算法,可得到每一个 $F_1^{(k)},F_2^{(k)},\cdots,F_n^{(k)}$,直到 $k=2e$步.

Step 3 以 $F_1^{(k)},F_2^{(k)},\cdots,F_n^{(k)}$ 为样本, $\{y^e,y^{e+1},\cdots,y^{2e}\}$为基向量,构作基向量阵: M_n^{2e}.

Step 4 利用高斯网络消去法[7],求 M_n^{2e} 的秩,若 $\mathrm{rank}(M_n^{2e})=n-1$,则 $F(x,y)$ 在复数域不可约,否则可约.

4 算例

在 $C[x,y]$中,判定 $F(x,y)=x^2-1+xy^2+y$ 是否可约?

首先,取 $y=0$得: $F(x,0)=x^2-1=(x+1)(x-1)$,初始的权值为 $F(x,0)=0$的根.即: $C'_{1,0}=1$, $C'_{2,0}=-1$,利用上述权值学习算法学习: $k=2e=4$次,其学习过程为:

第一次学习: $w_1^{(0)}=1/2, w_1^{(1)}=1/2$;

第二次学习: $w_2^{(0)}=-1/2, w_2^{(1)}=1/2$;

根据学习算法 1有:

第一次逼近: $F_1^{(0)}=x-1, F_2^{(0)}=x+1$;

第二次逼近: $F-F_1^{(0)}F_2^{(0)}=xy^2+y \pmod{y^3}$

$$= f_1x+f_0.$$

$$F_1^{(1)}=F_1^{(0)}+\sum_j w_1^{(j)}f_j=x-1+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2,$$

$$F_2^{(1)}=F_2^{(0)}+\sum_j w_2^{(j)}f_j=x+1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2,$$

第三次逼近: $F-F_1^{(1)}F_2^{(1)}=\frac{1}{4}y^2 \pmod{y^4}$

$$= f_1x+f_0.$$

同理可得:

$$F_1^{(2)}=x-1+\frac{1}{2}y+\frac{5}{8}y^2,$$

$$F_2^{(2)}=x+1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2.$$

这样,最终通过学习得:

$$F_1=x-1+\frac{1}{2}y+\frac{5}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3-\frac{15}{128}y^4+\cdots,$$

$$F_2=x+1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{1}{16}y^3+\frac{15}{128}y^4+\cdots,$$

这时,对应的基阵为: $M_2^4=\begin{bmatrix}\frac{1}{16} & -\frac{15}{128} & \cdots \\ -\frac{1}{16} & \frac{15}{128} & \cdots\end{bmatrix}$.

可看出: $\mathrm{rank}(M_2^4)=1$所以, $F(x,y)$ 不可约.

5 结语

文中充分利用神经元的运算特性,根据二元多项式近似求根神经网络模型,设计出了一单输入多输出的前向三层神经网络,用于所给多项式不可约的判定,其输入层节点的个数由多项式的变元个数确定,隐层节点的个数由多项式的次数确定,给出了多项式不可约判定的代数神经网络理论基础及判定不可约的网络算法,通过算例表明,该学习算法有效,用于任意给定多元多项式的不可约的判定.相比传统的判定算法,稳定性好,可操作性强,易扩充到其它数域上去,为多项式不可约判定提供一新的方法。

参考文献

1 李洪兴. 数学神经网络 (I). 北京师范大学学报 (自然科学版), 1996, 32 (4): 452~459.

2 周永权. 近似符号计算的神经网络模型方法的研究. 清华大学学报 (自然科学版), 1998, 38 (s2): 127~130.

3 Kaltofen E. Fast parallel absolute irreducibility testing. J symbolic compute, 1985, 1: 57~67.

4 Tateaki SASAKI, Masayuki Suzuki. Approximate factorization of multivariate polynomials and absolute irreducibility testing. Japan J indust Appl Math, 1991, 8 257~375.

5 周永权. 基于代数神经网络的多元多项式近似因式分解及学习算法. 计算机研究与发展, 1999, 36 (6): 668~675.

6 Kaltofen E, Newark, Delaware. Factorization of polynomials. Computing suppl, 1982, 4 95~113.

7 焦李成. 神经网络计算. 西安: 西安电子大学科技出版社, 1996.

8 史忠植. 神经计算. 北京: 电子工业出版社, 1993.

(责任编辑: 黎贞崇)