DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.04.005
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (4): 253~ 255, 258

一类广义 Liénard型系统的解的有界性*

Boundedness of Solutions for a Class of Generalized Liénard-type System

杨启贵
Yang Qigui
(广西师范大学数学与计算机科学系 桂林市育才路 3号 541004)
(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要 研究具有多个奇点的广义 Liénard系统 $\dot{x} = \frac{1}{a(x)}(h(y) - F(x)), \dot{y} = -a(x)g(x)$ 解的有界性，获得了系统解正向有界的充要条件，进而得全局渐近稳定的充要条件。

关键词 广义 Liénard系统 有界性 全局渐近稳定
中图法分类号 O 175.12

Abstract The boundedness of the solutions for the generalized Liénard-type system (E): $\dot{x} = \frac{1}{a(x)}[h(y) - F(x)], \dot{y} = -a(x)g(x)$ with a finite or infinite number of singular points are dealed with, and some sufficient and necessary conditions for all solution of the system to be bounded for $t \geqslant 0$ are given. Moreover, the necessary and sufficient condition for the global asymptotic stability for (E) are obtained.

Key words generalized Liénard system, boundedness, global asymptotic stability

考虑如下非线性系统的解的有界性

$$\dot{x} = \frac{1}{a(x)}[h(y) - F(x)], \ \dot{y} = -a(x)g(x), \tag{1}$$

其中 $a, h, F, g \in C(R, R)$，且保证(1)初值问题解的唯一性．为方便总记

$$G(x) = \int_0^x a^2(s)g(s)\mathrm{d}s, \ H(y) = \int_0^y h(s)\mathrm{d}s,$$

$a(x) \equiv 1$时系统(1)为著名的广义 Liénard系统．

$$\dot{x} = h(y) - F(x), \ \dot{y} = -g(x), \tag{2}$$

在奇点唯一的情况下，对系统(2)的有界性已有广泛研究，获得大量结果．然而，许多实际系统往往具有多个奇点，因此，近几年已有作者对具有多个奇点的系统(2)的有界性进行讨论．最近，在下列假设

(A_0) $\exists x_0' < 0, x_0 > 0$，使当 $x > x_0$ 或 $x < x_0'$ 时 $xg(x) > 0$，

之下，文献 [1~3]在一定条件下获得了系统(2)解有界的充分条件，且文献 [2]证明了

定理 A 若当 $x_0' = -x_0$ 时(A_0)成立，且

(A_1) $xF(x) > 0$，当 $|x| \geqslant x_0$ 时；

(A_2) $G(+\infty)$ 与 $G(-\infty)$ 至少一个有界

则系统(2)的解一致有界的充要条件是

(A_3) $\overline{\lim\limits_{|x| \to +\infty}}(|F(x)| + G(x)) = +\infty$.

显然，条件(A_0)在文献 [1~3]中起作重要作用，由文献 [4~6]不难看出，(A_0)并非系统(1)解的有界性的必要前提，因此，当条件(A_0)不成立时，系统(1)的有界性条件(那怕是充分条件)都有待于继续探讨．更进一步，若定理 A中条件(A_0)~(A_3)均不满足，系统(2)或更一般(1)的情形又将如何呢?这是一项困难而又重要的课题．

本文目的就是研究系统(1)的解的有界性，获得了系统(1)的解一致有界的充分或充要条件，进而得到了(1)为全局渐近稳定的充要条件，推广和改进了 [4, 7, 8]的结果．

本文总设

(H_0) $yh(y) > 0 (y \neq 0)$，$h(\pm\infty) = \pm\infty$，$F(0) = 0$，$a(x) > 0$．

定理 1 设存在正常数 P 及(H_0)成立，且

(H_1) $F(x) \geqslant -P$，当 $x \in R^+$ 时；$F(x) \leqslant P$，当 $x \in R^-$；

(H_2) $G(x) \geqslant -P$，$g(x)F(x) \geqslant 0$，当 $x \in R$ 时；

1999-03-26收稿。
* 广西自然科学基金资助课题(9811021)。

(H$_3$) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}[G(x)+F(x)]+$
$$\int_0^{+\infty}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s=+\infty; \quad (3)$$
(H$_4$) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}[G(x)-F(x)]+$
$$\int_{-\infty}^{0}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s=+\infty; \quad (4)$$
则系统(1)的解一致有界.

证明 设 $A(x(0),y(0))=(x_0,y_0)$ 是平面上任一点,$(x(t),y(t))$是系统(1)过点 A 的解,且 $|x_0|+|y_0|\leqslant D$.

令 $V(x,y)=H(y)+G(x)+P$, (5)

则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Big|_{(1)}=-a(x)g(x)F(x)\leqslant 0$,

从而存在正常数 $D_0=D_0(D)>0$使得

$V(t)=V(x(t),y(t))\leqslant V(0)\leqslant D_0$,当 $t\geqslant 0$时, (6)

首先证 $y(t)$有界.即存在 $B=B(D_0)$使得当 $t\geqslant 0$时有 $|y(t)|\leqslant B$.

事实上,由(H$_0$)与(5)、(6)易知,$y(t)$有界.否则 $y(t)$无界,此时可推出 $H(y(t))$无界,从而与(6)矛盾.故存在 $B=B(D_0)$使得当 $t\geqslant 0$时有 $|y(t)|\leqslant B$.

其次,证当(H$_3$)成立时 $x(t)$有上界.分三步证.

i) 若 $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+\infty}}G(\alpha)=+\infty$,则 $\forall E_1>0\ \exists\ G(E_1)>D_0$,这与(6)矛盾.所以 $x(t)\leqslant E_1$,当 $t\in R^+$ 时;

ii) 若 $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+\infty}}F(\alpha)=+\infty$,则由前证 $y(t)$有界知 $h(y(t))$也有界,因此存在 $W_0=W_0(D)>0$使得当 $t\in R^+$ 有

$\dot{x}(t)=\frac{1}{a(x(t))}[h(y(t))-F(x(t))]\leqslant\frac{1}{a(x(t))}[W_0-F(x(t))]$.由于 $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+\infty}}F(\alpha)=+\infty$,因此存在 $E_2>D>0$使 $F(E_2)>W_0$,则可证当 $t\in R^+$ 时有 $x(t)<E_2$,事实上,若存在 $t_1>0$使得 $x(t_1)=E_2$且当 $0\leqslant s<t_1$时 $x(s)<E_2$,则

$0\leqslant\dot{x}(t_1)\leqslant\frac{1}{a(x(t_1))}(Q_0-F(x(t_1))=\frac{1}{a(x(t_1))}(Q_0-F(E_2))<0$.这是一个矛盾;

iii) 若 $\overline{\lim\limits_{\alpha\to+\infty}}[G(\alpha)+F(\alpha)]<+\infty$ 知存在 $W_1>0$使当 $t\in R^+$ 时有 $|G(\alpha)|+|F(\alpha)|\leqslant W_1$.此时,由(H$_1$)~(H$_3$)可得 $\int_0^{+\infty}a(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s=+\infty$,因而

$a(x(t))|\dot{x}(t)|\leqslant|h(y(t))|+|F(x(t))|\leqslant W_0+W_1\triangleq M$,当 $x(t)>0$于是存在 $E_3>0$使得

$$MD_0+\int_0^D a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s<\int_0^{E_3}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s.$$

下证 $x(t)<E_3$当 $t\in R^+$ 时.实际上,若存在 $t_2>0$使得 $x(t_2)=E_3$,则可找到 $t_0\geqslant 0$满足 $x(t_0)=D$ 且当 $s\in[t_0,t_2]$时 $D\leqslant x(s)\leqslant E_3$. 对 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant -a(x)g(x)F(x)$两端从 t_0到 t_2积分可得

$$\begin{aligned}V(t_2)&=V(t_0)-\int_{t_0}^{t_2}a(x(s))g(x(s))F(x(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant V(t_0)-\int_{t_0}^{t_2}a(x(s))g(x(s))F(x(s))\cdot\frac{a(x(s))|\dot{x}(s)|}{M}\mathrm{d}s\\&\leqslant D_0-\frac{1}{M}\left|\int_{t_0}^{t_2}a^2(x(s))g(x(s))F(x(s))\mathrm{d}s\right|\\&=D_0-\frac{1}{M}\left|\int_{x(t_0)}^{x(t_2)}a^2(x(s))g(s)F(s)\mathrm{d}s\right|\\&=D_0-\frac{1}{M}\Big(\int_0^{E_3}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s\\&\quad-\int_0^{D}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s\Big)<0.\end{aligned}$$

矛盾.所以 $x(t)<E_3$.

故由 i)~iii)知当 $t\in R^+$ 时 $x(t)<E_1+E_2+E_3$.

再次,证当(H$_4$)成立时,$x(t)$有下界.

类似第二步可证得.

综上可得系统(1)的解$(x(t),y(t))$一致有界.证毕.

注 1 此定理推广和改进了文献[4]相应结果.

定理 2 设 $a(x)$为有界函数及定理 1条件(H$_0$)~(H$_2$)成立,且下列条件之一满足

(H$_3$) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}[G(x)+F(x)]+$
$$\int_0^{+\infty}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s<+\infty;$$
(H$_4$) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}[G(x)-F(x)]+$
$$\int_{-\infty}^{0}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s<+\infty,$$
则系统(1)存在无界解.

证明 只证(H$_3$)情形((H$_4$)情形类似可证).

由(H$_3$)知,存在 $M>1$使得对 $x\geqslant 0$时均有 $|F(x)|<M$,$|G(x)|<M$.又根据(H$_0$)的 $h(+\infty)=+\infty$得,存在 $Y>1$使得当 $y\geqslant Y$时有 $h(y)\geqslant 2M$.设 $K\geqslant 1$,记 $y_0=Y+KM$,由(H$_0$)知 $H(+\infty)=+\infty$,从而可选取充分大的 K使得

$$H(y_0)-2M-2\int_0^{+\infty}a^2(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s>H(Y).$$

令 $U(t)=H(y(t))+G(x(t))$,

则 $\frac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{(1)}=-a(x)g(x)F(x)$.

下面考察以 $A(x(0)),y(0))=(x_0,y_0)$出发的

轨线.现系统(1)从点 A 出发的轨线 $(x(t), y(t))$,当 $t \geqslant 0$时均有 $y(t) > Y$.

否则存在 $t_1 > 0$使得 $y(t_1) = Y$,当 $t \in [0, t_1)$时 $y(t) > Y$,于是当 $t \in [0, t_1)$时有

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{a(x(t))}[h(y(t)) - F(x(t))] > \frac{M}{a(x(t))} > \frac{1}{a(x(t))},$$

从而 $x(t)$ 在 $[0, t_1)$ 上是单增.对 $\frac{dU(t)}{dt} = -a(x(t))g(x(t))F(x(t))$ 从 0到 t_1 两端积分可得

$$U(t_1) = U(0) - \int_0^{t_1} a(x(s))g(x(s))F(x(s))ds$$

$$\geqslant U(0) - \int_0^{t_1} a(x(s))g(x(s))F(x(s)) \cdot a(x(s))\dot{x}(s)ds$$

$$= U(0) - \int_{x(0)}^{x(t_1)} a^2(\alpha)g(\alpha)F(\alpha)d\alpha$$

$$> U(0) - \int_0^{+\infty} a^2(s)g(s)F(s)ds, \quad (7)$$

$$U(t) \leqslant H(y) + |G(x)| \leqslant H(y) + M,$$

$$H(y_0) \leqslant U(0) + |G(x_0)| \leqslant U(0) + M, \quad (8)$$

$$U(t_1) \leqslant H(y(t_1)) + |G(x(t_1))| \leqslant H(y(t_1)) + M + \int_0^{+\infty} a^2(s)g(s)F(s)ds, \quad (9)$$

由(7)、(8)、(9)可得

$$H(y(t_1)) + M + \int_0^{+\infty} a^2(s)g(s)F(s)ds \geqslant H(y_0) - M - \int_0^{+\infty} a^2(s)g(s)F(s)ds.$$

于是, $H(y(t_1)) \geqslant H(y_0) - 2M - 2\int_0^{+\infty} a^2(s)g(s)F(s)ds > H(Y)$.

从而 $y(t_1) > Y$,矛盾.所以,当 $t \geqslant 0$时 $y(t) > Y$,由系统(1)可得

$$\dot{x} = \frac{1}{a(x)}(h(y) - F(x)) > \frac{M}{a(x)}, \quad (10)$$

根据 $a(x)$ 为有界函数知,存在常数 $N > 0$使得 $0 < a(x) < N$.由(10)可得 $\dot{x} > \frac{M}{N}$.因而 $x(t) > x_0 + \frac{M}{N}t$,当 $t \to +\infty$时 $x(t) \to +\infty$,所以系统(1)存在无界解.证毕.

由定理 1,2立得

定理 3 设 $a(x)$ 是有界函数,且定理 1条件 $(H_0) \sim (H_2)$成立,则系统(1)的解一致有界当且仅当(3)、(4)满足.

例 当 n是自然数时,考虑系统

$$\dot{x} = y^{2n-1} - \sin x \cos^2 x, \quad \dot{y} = -\sin x, \quad (11)$$

则系统(11)的解一致有界.

事实上,此时 $a(x) = 1, h(y) = y^{2n-1}, F(x) = \sin x \cos^2 x, g(x) = \sin x$,易知(11)满足定理 1的条件 $(H_0) - (H_2)$,且 $\int_0^{\pm\infty} a^2(s)g(s)F(s)ds = \int_0^{\pm\infty} \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \pm\infty$,从而满足定理 3条件.证毕.

注 2 此例虽然简单,但不能由文献[1~ 11]等以前判别法判定.且此时亦有 $\overline{\lim_{|x| \to +\infty}}(G(x) + F(x)\operatorname{Sgn} x) < +\infty$,而(11)的解却一致有界.

利用解的有界性可讨论系统(1)的零解的全局渐近稳定性.

定理 4 设(H_0)成立,且 $xF(x) \geqslant 0$,则系统(1)的零解全局渐近稳定的充要条件是

(A) $xg(x) > 0(x \neq 0)$; $F(x) \not\equiv 0$在含零任一区间;及(3)、(4)满足.

证明 充分性 易知系统(1)有唯一奇点(0, 0).构造 V函数 $V(x, y) = H(y) + G(x)$.于是$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)} = -a(x)g(x)F(x) < 0(x \neq 0)$.在定理条件下, $V(x, y)$是正定的,且易知满足定理 1条件,从而系统(1)的任一解正向有界,根据 Barbashin-Krasovskii 定理得系统(1)的零解是全局渐近稳定的.

必要性 由(H_0)知,对任 $x_0 \in R$,存在一点 y_0使得 $h(y_0) = F(x_0)$且由零解全局渐近稳定易知 $g(0) = F(0) = 0$.下面可以完全重复文献[7]定理 1的必要性证明可得(A)成立.

下证(3)成立.否则根据定理 2证明可得(10),于是 $\dot{x}(t) > \frac{M}{a(x)} > 0$,从而 $x(t) > x(0) = x_0$,当 $t \in R^+$时,与零解全局渐近稳定矛盾.

类似可证(4)成立.证毕.

注 3 当系统(1)中 $h(y)$严格单增时,此定理推广和改进了文献[7]的定理 1.特别, $a(x) = 1, h(y) = y$时,文献 [8]的结果是定理 4的特例.从而改进和推广了文献 [7]的相应结果和文献 [8]的结论.

参考文献

1 韩茂安.一类广义 Liénard方程的有界性.科学通报, 1995, 40 (21): 1925~ 1928.

2 孙继涛. Liénard型系统的定性行为.数学物理学报, 1994, 14 (1): 90~ 95.

3 陈文成.具多个奇点的广义 Liénard系统解的有界性.高校应用数学学报, 1993, 8A (2): 142~ 148.

4 Sugie J. On the boundedness of solution of the generalized Liénard equation. Nonl Anol, 1987, 11: 1391~ 1397.

5 Huang Lihong. On the necessary and sufficient conditions for boundedness of the solution of the nonlinear oscillating equation. Nonl Anal, 1994, 23 (11): 1467~ 1475.

(下转第 258页 Continue on page 258)

$v) + Z^2(B - Z)(x - u)^2 - Z(y - v) \cdot \frac{h(x)(h(y) - h(v))}{y - v} + Z(x - u)(y - v) \cdot \frac{F(x) - F(u)}{x - u} + Z^2(x - u)(y - v) \cdot \frac{h(x)(h(y) - h(v))}{y - v} - Z^2(x - u)^2 \cdot \frac{F(x) - F(u)}{x - u}$

$= -2C(x - u)(y - v) + ZC(x - u)^2 + Z^2(x - u)(y - v) - Z^3(x - u)^2 - ZA(y - v)^2 + Z^2A(x - u)(y - v)$

$= -Z(Z^2 - C)([(x - u) - \frac{(1+A)Z^2 - 2C}{2(Z^2 - C)Z}(y - v)]^2 - \frac{(1-A)^2Z^4 - 4CZ^2 + 4C^2}{4(Z^2 - C)^2Z^2}(y - v)^2)$, (11)

注意到 $U_0 \leqslant Z$ 且 $0 < C < V(V < U_0^2)$,从而有 $Z^2 - C \geqslant U_0^2 - V > 0$. 当 $A \neq 1$ 时,注意到 $0 \leqslant U_0 \leqslant Z \leqslant U_1$,利用条件(Ⅳ)可得

$$\frac{2C - 2C\sqrt{1 - (1 - A)^2}}{(1 - A)^2} < Z^2 < \frac{2C + 2C\sqrt{1 - (1 - A)^2}}{(1 - A)^2},$$

故知

$$(1 - A)^2Z^4 - 4CZ^2 + 4C^2 < 0, \qquad (12)$$

结合(11)、(12)两式即知定理 A的条件(iii)也满足. 因此应用定理 A即知系统 (1) 存在唯一的一致渐近稳定的概周期解. 当 $A = 1$,直接由(11)式即知定理 A的条件 (iii)满足.因此定理 2的结论成立.

2 实例

例 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (\frac{1}{4} + \sin^2 x)((1 - \frac{\sqrt{2}}{4})y + \frac{\sqrt{2}}{8}\sin y), \\ \quad - 2x - \cos t - \cos\sqrt{2}t, \\ \dot{y} = -(xe^{-x^2} + \frac{1}{3}x), \end{cases} \qquad (13)$$

这里 $h(x) = \frac{1}{4} + \sin^2 x, h(y) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{4})y + \frac{\sqrt{2}}{8}\sin y, H(y) = (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8})y^2 - \frac{\sqrt{2}}{8}\cos y > 0(y \neq 0)$ 且 $H(y) \to \infty (y \to \infty)$; $F(x) = 2x, g(x) = xe^{-x^2} + \frac{1}{3}x, \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-x^2} + \frac{2}{15}x^2 \leqslant G(x) \leqslant 2 - 2e^{-x^2} + \frac{2}{3}x^2$, 因此 $G(x) > 0(x \neq 0), |F(x)| + G(x) \to +\infty (|x| \to +\infty)$; $e(t) = \sin t + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$ 是实连续概周期函数, $E(t) = -\cos t - \cos\sqrt{2}t$ 连续有界. 又由于 $h'(y) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\cos y$, 故 $0 < A < 1$; $g'(x) = \frac{1}{3} + (1 - 2x^2)e^{-x^2}$,故 $0 < C < \frac{4}{3}$;明显地, $0 < B = 2$,因此定理 2的条件满足. 从而系统 (13) 存在唯一的一致渐近稳定的概周期解.

参考文献

1 Yoshizawa T. 稳定性理论与周期解和概周期解的存在性. 郑祖庥等译. 南宁: 广西人民出版社, 1985. 53~ 64, 186~ 190.

2 Ezeilo J O. On the existence of almost periodic solutions of some dissipative second order differential equations. Ann Math Pure Appl, 1994, 65 (137): 389~ 410.

3 姜东平, 何崇佑. 一类二阶非线性微分方程组的概周期解. 南京大学学报 (自然科学版), 1981, (4): 419~ 431.

4 董梅芳. 一类非自治系统概周期解的存在唯一性. 东南大学学报, 1995, 25 (1): 82~ 86.

5 林发兴. Liénard方程周期解、概周期解的存在性. 数学学报, 1996, 39 (3): 314~ 318.

6 刘静行. 一类非线性微分方程组的概周解. 广西师范大学学报, 1994, 12 (3): 21~ 24.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 255页 Continue from page 255)

6 Huang Lihong, Wang Zhicheng. On the boundedness conditions for solutions of a autonomous differential system. Ann of Dff Eqs, 1996, 12 (1): 60~ 69.

7 Qian Chuanxi. On global asymptotic stability of second order nonlinear differntial system. Nonl Anal, 1994, 22 (7): 823~ 833.

8 李惠卿. Liénard方程零解全局渐近稳定的充要条件. 数学学报, 1998, 31 (2): 209~ 214.

9 Villari G. On the qualitative behaviour of solution of Liénard equation. J Diff Eqns, 1987, 67: 269~ 277.

10 Bo Zhang. On the retarded Liénard equotion. Proc Am Math Soc, 1992, 115 (3): 779~ 785.

11 Bo Zhang. Boundedness and stability of solution of the retarded Liénard equation with negative damping. Nonl Anal, 1993, 20 (2): 303~ 313.

(责任编辑: 黎贞崇)