DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.02.005

1,即 $x(t)> x_0+ t\to+\infty\ (t\to+\infty)$,这又与零解渐近稳定的假设矛盾,必要性得证.

例: 在系统(1)中取 $0\leqslant f\leqslant \frac{1}{4}$, $a(x)=e^x$, $g(x)=\frac{x}{e^x(1+x^2)}$,即考虑下述系统

$$\begin{cases}\dot{x} = e^{-x}(y-F(x)),\\ \dot{y} = -e^x g(x(t-f)),\end{cases}\qquad (14)$$

其中 $F(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant \frac{c}{2},\\ \frac{4}{5}+\frac{1}{5}\sin x, & x>\frac{c}{2},\\ -\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\sin x, & x<-\frac{c}{2}.\end{cases}$

易见 $F(x)$ 在 $\pm\frac{c}{2}$ 处连续,并且条件(i)满足. $a(x),g(x),F(x)$ 均为连续函数,当 $|x|\leqslant\frac{c}{2}$ 时 $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{2}{c}$,即 $x\leqslant\frac{c}{2}\sin x$,当 $0<x\leqslant\frac{c}{2}$ 时,$F(x)-2fa(x)g(x)=\sin x-\frac{2fx}{1+x^2}\geqslant\sin x-2f\cdot\frac{c}{2}\sin x>0$,当 $x>\frac{c}{2}$ 时,$F(x)-2fa(x)g(x)=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\sin x-\frac{2fx}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{5}-\frac{1}{2}>0$,而当 $x>0$ 时,$a(x)g(x)>0$,从而 $a(x)g(x)[F(x)-2fa(x)g(x)]\geqslant0\ (x\geqslant0)$.类似地,当 $x<0$ 时,$F(x)-2fa(x)g(x)<0$,但同时也有 $a(x)g(x)<0$,因此 $a(x)g(x)[F(x)-2fa(x)g(x)]\geqslant0$,条件(ii)成立.

注意到 $\limsup\limits_{x\to+\infty}(G(x)+F(x))=+\infty$,同时有

$$\int_0^{+\infty}a(x)g(x)F(x)\,dx=\int_0^{\frac{c}{2}}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx+\int_{\frac{c}{2}}^{+\infty}\frac{\frac{4}{5}x+\frac{x}{5}\sin x}{1+x^2}dx=+\infty,$$

故(4.1)式成立(类似计算知(4.2)式也成立),系统(14)的零解渐近稳定.

参考文献

1 Guidorizzi H L. Oscillating and periodic solution of type $\ddot{x}+f_1(x)\dot{x}+f_2(x)\dot{x}^2+g(x)=0$. J Math Anal Appl, 1993, 176(1), 11~23.

2 Jiang J F. On the qualitative behavior of solutions of the equation $\ddot{x}+f_1(x)\dot{x}+f_2(x)\dot{x}^2+g(x)=0$. J Math Anal Appl, 1995, 194(3), 595~611.

3 Qian C. Boundedness and asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear system. Bull London Math Soc, 1992, 24, 281~288.

4 Jiang J F. The global stability of a class of second order differential equations. Nonlinear Anal, 1997, 28(8): 855~870.

5 Zhang B. Boundedness and stability of solutions of the retarded Liénard equation with negative damping. Nonlinear Anal, 1993, 20(3): 303~313.

6 Zhang B. Necessary and sufficient conditions for boundedness and oscillation in the retarded Liénard equation. J Math Anal Appl, 1996, 200(2), 453~473.

(责任编辑: 黎贞崇)

一个核反应系统的 Painlevé 分析

谷 元 谷 艺 刘太琳

我们使用 Painlevé 分析方法研究了一个核反应系统[1]

$$\begin{aligned}u_t(x,t)&=u_{xx}+u(av-b),\\ v_t(x,t)&=Dv_{xx}+du.\end{aligned}\qquad(1)$$

其中 a,b,d 和 D 皆为常数,并且 $D>0$.令 u_j,v_j,h为待定函数,我们把

$$u=\sum_{j=0}^{4}u_j h^{j-4},\quad v=\sum_{j=0}^{2}v_j h^{j-2}.\qquad(2)$$

代入(1),求出 h^j 的系数,发现它们都是 h导数的函数,并且是不相容的.所以系统(1)不具有关于偏微分方程的 Painlevé 性质.但是当 D 取一些特殊值,如 $D=12, 7/2, 23/9$ 等值时,我们却能够构造出它的行波解.我们可以得到

$$h=A+Be^{-2Q(x-Ct)}\qquad(3)$$

其中 A,B 和 Q 为任意常数,并且 $C=2DQ$,或者 $C=-(34D/2-3D)Q$.这样,我们就可以得到 h^j 系数的具体表示.再由(2)和(3),我们可以构造出(1)的行波解.

这种方法可以应用于许多非线性偏微分方程的求解.

参考文献

1 Pao C V. On nonlinear reaction diffusion systems, J Math Analysis and Applications, 1982, 87: 165~198.

(第一作者单位: 山东工业大学计算机系)