DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.02.004

广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (2): 91~ 93

一类二阶非线性时滞系统解的渐近稳定性

Asymptotic Stability of a Second Order Nonlinear Retarded Differential System

冯春华

Feng Chunhua

(广西师范大学数学与计算机科学系　桂林市育才路3号　541004)

(Dept. of Math. & Comp. Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004)

摘要　研究一类二阶非线性时滞系统解的性态，给出了系统零解渐近稳定的一个充要条件.

关键词　时滞系统　渐近稳定　充要条件

中图法分类号　O 175.24

Abstract　The stability of a second order nonlinear retarded differential system is investigated, a necessary and sufficient condition is obtained.

Key words　retarded system, asymptotic stability, necessary and sufficient condition

考虑时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{a(x)}(y - F(x)), \\ \dot{y} = -a(x)g(x(t-\tau)), \end{cases} \tag{1}$$

其中函数 $a(x), g(x), F(x)$ 均连续, τ 是非负常数.如果令 $a(x) = \exp(\int_0^x f_2(s)\mathrm{d}s)$, $F(x) = \int_0^x a(s)f_1(s)\mathrm{d}s$, 则系统(1)转化成二阶时滞 Liènard 方程

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x(t-\tau)) = 0, \tag{2}$$

当 $\tau = 0$,系统(2)变为无时滞的情形

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0, \tag{3}$$

文献[1~4]研究了方程(3)解的各种性态.特别地,在系统(1)中取 $a(x) = 1$,文献[5, 6]研究了此种情形解的性态.本文研究系统(1)解的渐近稳定性,得到了一个保证零解渐近稳定的充要条件.

记 $G(x) = \int_0^x a^2(s)g(s)\mathrm{d}s$,并设下述条件成立:

(i) $a(x) > 0, xg(x) > 0 (x \neq 0), xF(x) > 0 (x \neq 0)$;

(ii) $a(x)g(x)[F(x) - 2\tau a(x)g(x)] \geqslant 0$.

定理 1　假设条件(i)、(ii)成立,则系统(1)的零解渐近稳定的充要条件为下述关系式成立:

$$\limsup_{x \to +\infty}(G(x) + F(x)) + \int_0^{+\infty} a(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s = +\infty, \tag{4.1}$$

$$\limsup_{x \to -\infty}(G(x) - F(x)) + \int_{-\infty}^0 a(s)g(s)F(s)\mathrm{d}s = +\infty \tag{4.2}$$

证明　充分性　注意在假设条件下,系统(1)有零解.设 $(x, y) = (x(t), y(t))$ 为系统(1)的解,考虑函数

$$V(t) = V(x, y) = \frac{1}{2}\left(y - \int_{t-\tau}^t a(x(t))g(x(s))\mathrm{d}s\right)^2 + G(x) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t a^2(x(t))g^2(x(u))\mathrm{d}u\mathrm{d}s, \tag{5}$$

由假设条件易知 $V(0, 0) = 0$, $V(t)$ 定正,且有

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{(1)}(t) &= \left(y - \int_{t-\tau}^t a(x(t))g(x(s))\mathrm{d}s\right)(-a(x)g(x)) + a^2(x)g(x)\left(\frac{1}{a(x)}(y - F(x))\right) + \\
&\quad \int_{-\tau}^0 [a^2(x(t))g^2(x(t)) - a^2(x(t))g^2(x(t+s))]\mathrm{d}s \\
&= -a(x)g(x)F(x) + a^2(x)g(x)\int_{t-\tau}^t g(x(s))\mathrm{d}s + \\
&\quad \tau a^2(x)g^2(x) - a^2(x)\int_{-\tau}^0 g^2(x(t+s))\mathrm{d}s \leqslant - \\
&\quad a(x)g(x)F(x) + a^2(x)\int_{t-\tau}^t |g(x(t))g(x(s))|\mathrm{d}s + \\
&\quad \tau a^2(x)g^2(x) - a^2(x)\int_{t-\tau}^t g^2(x(s))\mathrm{d}s \leqslant \\
&\quad -a(x)g(x)F(x) + \frac{1}{2}\tau a^2(x)g^2(x) + \\
&\quad \frac{1}{2}a^2(x)\int_{t-\tau}^t g^2(x(s))\mathrm{d}s + \tau a^2(x)g^2(x) -
\end{aligned}$$

1998-06-18收稿, 1998-10-19修回.

$$a^2(x)\int_{t-\tau}^{t} g^2(x(s))\,ds \leqslant -a(x)g(x)[F(x)-2\tau a(x)g(x)]-\frac{1}{2}\tau a^2(x)g^2(x)\leqslant 0, \tag{6}$$

由(5)、(6)式知系统(1)的零解是稳定的.而且实际上这还蕴含 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf|x(t)|=0$. 我们证明同时有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup|x(t)|$. 若不然,设 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup|x(t)|=\lambda>0$, 则存在适当大的正数 T,当 $t>T$ 时 $|x(t)|>0$.考虑序列 $\{t_n\}$,如果有必要,可以取子列使得 $T<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$, $t_n\to+\infty\ (n\to\infty)$,并且 $|x(t_n)|=\frac{\lambda}{3}$, $|x(t_{n+1})|=\frac{2\lambda}{3}$,而 $\frac{\lambda}{3}<|x(s)|<\frac{2\lambda}{3}$, $s\in(t_n,t_{n+1})$. 记所有这样的区间 (t_n,t_{n+1}) 的最小区间长度为 W,由 $F(x),a(x),g(x)$ 的连续性以及条件(i)、(ii)可知当 $x\neq 0$ 时 $g(x)\neq 0$, 而 $a(x)>0$, 记 $L=\min\{a^2(a)g^2(a):\ \frac{\lambda}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2\lambda}{3}\}$, 利用(6)式及条件(ii),当 $t>t_{n+1}$ 时,从 T 到 t 积分(6)式得

$$V(t)\leqslant V(T)-\frac{1}{2}\tau\int_T^t a^2(x(s))g^2(x(s))\,ds$$

$$\leqslant V(T)-\frac{1}{2}\tau\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a^2(x(s))g^2(x(s))\,ds$$

$$\leqslant V(T)-\frac{1}{2}\tau L\sum_{i=1}^{n}(t_{i+1}-t_i)$$

$$\leqslant V(T)-\frac{1}{2}\tau LWn\to-\infty\ (n\to\infty), \tag{7}$$

这与 $V(t)$ 的定义矛盾.因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$. 又由(5)、(6)式知存在常数 $C\geqslant 0$ 使 $V(t)\to C^2(t\to+\infty)$,由 $x(t)\to 0(t\to+\infty)$ 以及条件(i)和 $V(t)$ 的定义知应有 $y^2\to c^2(t\to+\infty)$. 假设 $C>0$,则存在常数 $K>0$ 使 $t\geqslant K$ 时有 $y^2\geqslant\frac{c^2}{4}$,不妨设 $y(t)\geqslant\frac{c}{2}$.注意到 $F(x)$ 的连续性以及条件(i),只要 K 适当大,当 $t\geqslant K$ 时 $F(x)\leqslant\frac{c}{4}$,由 $a(x)$ 的连续性以及 $x(t)\to 0(t\to+\infty)$,可以记 $A=\max\{a(x(t)):\ t\geqslant K\}$,则当 $t\geqslant K$ 时有 $\dot{x}(t)\geqslant\frac{1}{A}(\frac{c}{2}-\frac{c}{4})=\frac{c}{4A}$,即 $x(t)\geqslant x(K)+\frac{c}{4A}(t-K)\to+\infty\ (t\to+\infty)$,矛盾.这蕴含 $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=0$,这证明零解是渐近稳定的.

必要性　如果系统(1)的零解渐近稳定,而(4.1)式不成立((4.2)式的证明是类似的),即

$$\lim_{x\to+\infty}\sup(G(x)+F(x))+\int_0^{+\infty}a(s)g(s)F(s)\,ds<+\infty, \tag{8}$$

因此对任意的 $x\in R^+$,由条件(i)可设存在正数 F_0, G_0, a_0, g_0 使 $F(x)\leqslant F_0$, $G(x)\leqslant G_0$, $a(x)\leqslant a_0$, $g(x)\leqslant g_0\ (x\in R^+)$. 考虑函数

$$W(t)=W(x,y)=\frac{1}{2}\Big(y-\int_{t-\tau}^{t}a(x(t))g(x(s))\,ds\Big)^2+G(x), \tag{9}$$

则有

$$\dot{W}(t)=\Big(y-\int_{t-\tau}^{t}a(x(t))g(x(s))\,ds\Big)(-a(x(t))g(x(t)))+a^2(x)g(x)\Big(\frac{1}{a(x)}(y-F(x))\Big)=-a(x)g(x)F(x)+a^2(x)g(x)\int_{t-\tau}^{t}g(x(s))\,ds\geqslant -a(x)g(x)F(x)-\tau a^2(x)g^2(x)-a^2(x)\int_{t-\tau}^{t}g^2(x(s))\,ds,$$

利用条件(ii)即得

$$\dot{W}(t)\geqslant -2a(x)g(x)F(x)-a_0^2\int_{t-\tau}^{t}g^2(x(s))\,ds, \tag{10}$$

选取 $y_0>0$ 满足

$$y_0^2-4F_0^2-4G_0-6a_0^2\tau^2g_0^2-10\int_0^{+\infty}a(s)g(s)F(s)\,ds>2a_0^2, \tag{11}$$

由(10)式我们断定有 $\dot{x}(t)>1$, $t\in R^+$. 若不然,假设存在 $t_1>0$ 使 $\dot{x}(t_1)=1$,则从 0 到 t_1 积分(10)式并交换二重积分的次序得

$$W(t_1)\geqslant W(0)-2\int_0^{t_1}a(s)g(s)F(s)\,ds-a_0^2\int_0^{t_1}\int_{s-\tau}^{s}g^2(x(\theta))\,d\theta\, ds\geqslant W(0)-2\int_0^{t_1}a(s)g(s)F(s)\,ds-a_0^2\int_{-\tau}^{t_1-\tau}\int_{\theta}^{\theta+\tau}g^2(x(\theta))\,ds\,d\theta-a_0^2\int_{t_1-\tau}^{t_1}\int_{\theta}^{t_1}g^2(x(\theta))\,ds\,d\theta$$

$$\geqslant W(0)-2\int_0^{t_1}a(s)g(s)F(s)\dot{x}(s)\,ds-a_0^2\tau\int_{-\tau}^{t_1-\tau}g^2(x(\theta))\,d\theta-a_0^2\tau\int_{t_1-\tau}^{t_1}g^2(x(\theta))\,d\theta\geqslant W(0)-3\int_{x(0)}^{x(t_1)}a(u)g(u)F(u)\,du-a_0^2\tau\int_{-\tau}^{0}g^2(x(\theta))\,d\theta\geqslant W(0)-3\int_0^{+\infty}a(s)g(s)F(s)\,ds-a_0^2\tau^2g_0^2\geqslant\frac{1}{2}y_0^2-G_0-a_0^2\tau^2g_0^2-3\int_0^{+\infty}a(s)g(s)F(s)\,ds, \tag{12}$$

另一方面有

$$W(t_1)=\frac{1}{2}\Big(y(t_1)-\int_{t_1-\tau}^{t_1}a(x(t_1))g(x(s))\,ds\Big)^2+G(x(t_1))=\frac{1}{2}\Big(a(x(t_1))\dot{x}(t_1)+F(x(t_1))-\int_{t_1-\tau}^{t_1}a(x(t_1))g(x(s))\,ds\Big)^2+G(x(t_1))\leqslant a_0^2\dot{x}^2(t_1)+2F_0^2+2a_0^2\tau^2g_0^2+G_0+2\int_0^{+\infty}a(s)g(s)F(s)\,ds, \tag{13}$$

联合(12)、(13)即得

$$2a_0^2\dot{x}^2(t_1)\geqslant y_0^2-4F_0^2-4G_0-6a_0^2\tau^2g_0^2-10\int_0^{+\infty}a(s)g(s)F(s)\,ds,$$

由(11)式知 $\dot{x}(t_1)>1$,矛盾.故对 $t\in R^+$ 有 $\dot{x}(t)>$

1,即 $x(t) > x_0 + t \to +\infty$ $(t \to +\infty)$,这又与零解渐近稳定的假设矛盾,必要性得证.

例: 在系统(1)中取 $0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{4}$, $a(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x}{e^x(1+x^2)}$,即考虑下述系统

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-x}(y - F(x)), \\ \dot{y} = -e^x g(x(t-\tau)), \end{cases} \tag{14}$$

其中 $F(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin x, & x > \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin x, & x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

易见 $F(x)$ 在 $\pm\frac{\pi}{2}$ 处连续,并且条件(i)满足. $a(x), g(x), F(x)$ 均为连续函数,当 $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时 $\frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{2}{\pi}$,即 $x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin x$,当 $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, $F(x) - 2\tau a(x)g(x) = \sin x - \frac{2\tau x}{1+x^2} \geqslant \sin x - 2\tau \cdot \frac{\pi}{2}\sin x > 0$,当 $x > \frac{\pi}{2}$ 时, $F(x) - 2\tau a(x)g(x) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\sin x - \frac{2\tau x}{1+x^2} \geqslant \frac{3}{5} - \frac{1}{2} > 0$,而当 $x > 0$ 时, $a(x)g(x) > 0$,从而 $a(x)g(x)[F(x) - 2\tau a(x)g(x)] \geqslant 0 (x \geqslant 0)$.类似地,当 $x < 0$ 时, $F(x) - 2\tau a(x)g(x) < 0$,但同时也有 $a(x)g(x) < 0$,因此 $a(x)g(x)[F(x) - 2\tau a(x)g(x)] \geqslant 0$,条件(ii)成立.

注意到 $\limsup_{x \to +\infty}(G(x) + F(x)) = +\infty$,同时有

$$\int_0^{+\infty} a(x)g(x)F(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\frac{4}{5}x + \frac{x}{5}\sin x}{1+x^2}dx = +\infty,$$

故(4.1)式成立(类似计算知(4.2)式也成立),系统(14)的零解渐近稳定.

参考文献

1 Guidorizzi H L. Oscillating and periodic solution of type $\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$. J Math Anal Appl, 1993, 176(1), 11~23.

2 Jiang J F. On the qualitative behavior of solutions of the equation $\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0$. J Math Anal Appl, 1995, 194(3), 595~611.

3 Qian C. Boundedness and asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear system. Bull London Math Soc, 1992, 24, 281~288.

4 Jiang J F. The global stability of a class of second order differential equations. Nonlinear Anal, 1997, 28(8): 855~870.

5 Zhang B. Boundedness and stability of solutions of the retarded Liénard equation with negative damping. Nonlinear Anal, 1993, 20(3): 303~313.

6 Zhang B. Necessary and sufficient conditions for boundedness and oscillation in the retarded Liénard equation. J Math Anal Appl, 1996, 200(2), 453~473.

(责任编辑: 黎贞崇)

一个核反应系统的 Painlevé 分析

谷 元 谷 艺 刘太琳

我们使用 Painlevé 分析方法研究了一个核反应系统[1]

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx} + u(av - b), \\ v_t(x,t) &= Dv_{xx} + du. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 a, b, d 和 D 皆为常数,并且 $D > 0$.令 u_j, v_j, φ 为待定函数,我们把

$$u = \sum_{j=0}^{4} u_j \varphi^{j-4}, \quad v = \sum_{j=0}^{2} v_j \varphi^{j-2}. \tag{2}$$

代入(1),求出 φ^j 的系数,发现它们都是 φ 导数的函数,并且是不相容的.所以系统(1)不具有关于偏微分方程的 Painlevé 性质.但是当 D 取一些特殊值,如 $D = 12, 7/2, 23/9$ 等值时,我们却能够构造出它的行波解.我们可以得到

$$\varphi = A + Be^{-2Q(x-Ct)} \tag{3}$$

其中 A, B 和 Q 为任意常数,并且 $C = 2DQ$,或者 $C = -(34D/2 - 3D)Q$.这样,我们就可以得到 φ^j 系数的具体表示.再由(2)和(3),我们可以构造出(1)的行波解.

这种方法可以应用于许多非线性偏微分方程的求解.

参考文献

1 Pao C V. On nonlinear reaction diffusion systems, J Math Analysis and Applications, 1982, 87: 165~198.

(第一作者单位: 山东工业大学计算机系)