DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.01.010
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (1): 35~36

一类最优交货期决策的模型
A Generalized Model of Optimal Due Date Determination

兰继斌
Lan Jibin

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路10号 530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 考虑几个独立工件在一台机器上加工,每个工件 J_i 交货期设置为 $d_i = r_i + kp_i^T$,目标是确定最优乘子 k^* 及工件的最优排序 s^*,使总的延误平方和最小.给出寻找最优乘子 k^* 及工件最优排序的方法.

关键词 总延误平方和 交货期 排序
中图法分类号 O 223

Abstract This paper considers n independent jobs to be processed on a single machine, Each job is assigned a due date $d_1 = r_1 + kp_1^T (T \geqslant 1)$. The objective is to determine the optimal multiple K^* and the optimal sequence s^* to minimize the total squared value of lateness. A procedure to find the optimal multiple k^* and the optimal sequence is presented.

Key words total squared value of lateness, due date, sequencing

在生产加工过程中,交货期的设置及决策具有重要意义.这不仅是生产管理的需要,也是理论研究的需要. Conway[1], Eilon和 Chowdhury[2,3], Weeks和 Fryer[4], Weeks[5], Cheng[6]等人通过计算机模拟技术,对交货期设置进行了广泛的研究,提出了各种不同的交货期设置方法,其中最简单和通用的是 TWK (total work dre-date) 交货期设置. TWK交货期设置为 $d_i = r_i + kp_i$,其中 d_i、r_i、p_i分别是工件 J_i 的交货期、到达时间和加工时间,k 为待定加工时间乘子. Eilon和 Chowdhury[2]在 TWK交货期设置基础提出了一类更广泛的交货期设置,即 $d_i = r_i + kp_i^T (T \geqslant 1)$,这类交货期设置是在工件的加工时间越长,涉及的工序数越多的假设条件下,通过计算机模拟得出的,这里 T是由生产系统确定.本文讨论在这类交货期设置下,工件总延误平方和最小问题.

1 模型及假设

设几个独立工件 $J_1, J_2 \cdots J_n$ 在一台机器上加工,所有工件在零时刻到达,即 $r_i = 0 (i = 1, 2 \cdots n)$,工件 J_i所需加工时间 p_i 在加工前已知,交货期设置为 $d_i = r_i + kp_i^T = kp_i^T (T \geqslant 1)$,并假设下列条件成立:

(1) 工件准备加工时间包含在加工时间内;

(2) 机器不能同时加工两个或两个以上工件,且只要还有工件等待加工,不允许机器空闲;

(3) 正在加工的工件不允许中途停下来,插入其它工件.

根据上述假设,对于任给的工件排序 S,用 $[i]$表示在 S中处于第 i个位置的工件,记 $C_{[i]} = \sum_{j=1}^{i} p_{[j]}$,显然 $J_{[i]}$ 的完工时间为 $C_{[i]}$,工件总延误平方和定义为:

$$L(S,k) = \sum_{i=1}^{n} (C_{[i]} - d_{[i]})^2 = \sum_{i=1}^{n} (C_{[i]} - kp_{[i]}^T)^2. \tag{1}$$

我们的目标是寻找最优乘子 K^* 及工件的最优排序 S^*,使得

$$L(S^*, k^*) = \min_{S,k} L(S,k). \tag{2}$$

引理 1 对任意给定工件排序 S,取 $k = \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^T C_{[i]} / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}$,能使 $L(S,k)$最小,且 $L(S,k)$的最小值为 $[(\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T})(\sum_{i=1}^{n} C_{[i]}^2) - (\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^T C_{[i]})^2] / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}$.

证明 将 $L(S,k) = \sum_{i=1}^{n} (C_{[i]} - kp_{[i]}^{2T})^2$展开,得

$L(S,k) = \sum_{i=1}^{n} C_{[i]}^2 - 2k\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^T C_{[i]} + k^2 \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}$,固定 S,则$\sum_{i=1}^{n} C_{[i]}$、$\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^T C_{[i]}$、$\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}$ 均为常数,把 $L(S,k)$ 看

1998-03-26收稿.

成是 k 的函数,当 k 取 $\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{T} C_{[i]} / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}$ 时,$L(S,k)$ 达到最小值,且其最小值为 $[\sum_{i=1}^{n} [(p_{[i]}) \sum_{i=1}^{n} C_{[i]}^{2}) - \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{T} C_{[i]})] / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}$.

引理 2 记 $f_1(S) = \sum_{i=1}^{n} C_{[i]}^{2} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{i} P_{[j]})^2$,则 S 按 SPT 排序(即 $p_{[1]} \leqslant p_{[2]} \leqslant \cdots \leqslant p_{[n]}$),能使 $f_1(S)$ 最小.

证明 设排序 S 不是按 SPT 排序,则在 S 中存在相邻工件 $J_{[e]}$ 和 $J_{[e+1]}$,使得 $p_{[e]} > p_{[e+1]}$,现对换 $J_{[e]}$、$J_{[e+1]}$ 的位置,其余工件位置不变,得到新工件排序 S',这样

$$f(S_1) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{i} p_{[j]})^2$$

$$= p_{[1]}^{2} + \cdots + (p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e]})^2 + (p_{[1]} + \cdots + p_{[r-1]} + p_{[e]} + p_{[e+1]})^2 + \cdots + (p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e]} + p_{[e+1]} + \cdots + p_{[n]})^2, \quad (3)$$

$$f_1(S') = p_{[1]}^{2} + \cdots + (p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e+1]})^2 + (p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e+1]} + p_{[e]})^2 + \cdots + (p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e+1]} + p_{[e]} + \cdots + p_{[n]})^2, \quad (4)$$

$$f_1(S) - f_1(S') = (p_{[e]} - p_{[e+1]})(2p_{[1]} + \cdots 2p_{[e-1]} + p_{[e]} + p_{[e+1]}) > 0, \quad (5)$$

这说明若 S 不是 SPT 排序,通过对换工件 $J_{[e]}$、$J_{[e+1]}$ 的位置,能使 $f_1(S)$ 的值减少,故引理 2 成立.

引理 3 记 $f_2(S) = \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{T} C_{[i]}$,($T \geqslant 1$),则 S 按 SPT 排序,能使 $f_2(S)$ 最大.

证明 设 S 不是 SPT 排序,则在 S 中存在相邻工件 $J_{[e]}$、$J_{[e+1]}$,使得 $p_{[e]} > p_{[e+1]}$,现对换 $J_{[e]}$、$J_{[e+1]}$ 的位置,其余工件位置不变,得到新的工件排序 S',这样

$$f_2(S) = \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{T} C_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} (p_{[i]} \sum_{j=1}^{i} p_{[j]}) = p_{[1]}^{T} \cdot p_{[1]} + \cdots + p_{[e]}^{T}(p_{[1]} + \cdots + p_{[e]}) + p_{[e+1]}^{T}(p_{[1]} + \cdots + p_{[e]} + p_{[e+1]}) + \cdots + p_{[n]}^{T}(p_{[1]} + \cdots + p_{[e]} + p_{[e+1]} + \cdots + p_{[n]}), \quad (5)$$

$$f_2(S') = p_{[1]}^{T} \cdot p_{[1]} + \cdots + p_{[e+1]}^{T}(p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e+1]}) + p_{[e]}^{T}(p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e+1]} + p_{[e]}) + \cdots + p_{[n]}^{T}(p_{[1]} + \cdots + p_{[e-1]} + p_{[e+1]} + p_{[e]} + \cdots + p_{[n]}), \quad (6)$$

$$f_2(S) - f_2(S') = p_{[e+1]}^{T} p_{[e]} - p_{[e]}^{T} p_{[e+1]}, \quad (7)$$

因为 $T \geqslant 1$, $p_{[e]} > p_{[e+1]}$ 故 $p_{[e+1]}^{T} p_{[e]} - p_{[e]}^{T} p_{[e+1]} = p_{[e+1]} p_{[e]} (p_{[e+1]}^{T-1} - p_{[e]}^{T-1}) \leqslant 0$,即 $f_2(S) \leqslant f_2(S')$,从而引理 3 成立.

定理 对于任给的 $T \geqslant 1$, S 按 SPT 排序,k 按引理的方法确定,能使 $L(S,k)$ 最小.

证明 设 S 是任一工件排序,S^* 是按 SPT 排序,k_s、k_{s^*} 按引理 1 的方法确定,则有

$$L(S, k_s) = \min_k L(S,k) = [(\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T})(\sum_{i=1}^{n} C_i^2) - (\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{T} C_{[i]})^2] / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T} = [(\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}) f_1(S) - (f_2(S))^2] / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}, \quad (8)$$

同理

$$L(S^*, k_s^*) = [(\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}) f_1(S^*) - (f_2(S^*))^2] / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T}. \quad (9)$$

由引理 2、3,我们知道 $f_1(S) \geqslant f_1(S^*)$, $f_2(S) \leqslant f_2(S^*)$,所以

$$L(S, k_s) - L(S^*, k_s^*) = [\sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T} (f_1(S) - f_1(S^*)) - (f_2(S))^2 + (f_2(S^*))^2] / \sum_{i=1}^{n} p_{[i]}^{2T} \geqslant 0, \quad (10)$$

从而定理成立.

2 结语

本文讨论一类交货期设置的总延误平方和最小问题.引理 1 给出确定最优乘子 k^* 的方法,定理说明工件按 SPT 排序,k 按引理 1 的方法确定,能使总延误平方和最小.

参考文献

1 Conway R W. Priority dispatching and job lateness in a job shop. J ind Egng, 1965, 16, 228~237.

2 Eilon S, Chwodhury L G. Studies in a simulated job shop. Procinstn Mech Engrs, 1975, 189, 30, 75, 417~425.

3 Eilon S, Chowdhury L G. Due-date in job shop scheduling. Int J Prod Res, 1976, 14, 223~237.

4 Weeks J K, Fryer J S. A methodology for assigning minimum cost due-dates. Mgmt Sci, 1977, 23, 872~881.

5 Weeks J K. A simulation study of predistabl due-dates. Mgmt Sci, 1979, 25, 3~373.

6 Cheng TCE. Optimal due-date determination and sequencing of n jobs on a single machine. I Opl Res Soc, 1984, 33, 5, 433~437.

(责任编辑: 黎贞崇)