DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1999.01.003
广西科学 Guangxi Sciences 1999, 6 (1): 14~ 18

6个三色 Ramsey数 $R(3,3,q)$的新下界*

New Lower Bounds of Six 3-color Ramsey Numbes $R(3,3,q)$

李桂清 苏文龙** 罗海鹏***
Li Guiqing Su Wenlong Luo Haipeng

(广西大学计算机与信息科学学院 南宁 530004)
(Dept. of Comp. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 研究正则素数阶循环图,提出计算多色 Ramsey数 $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$下界的一种算法,得到 6个三色 Ramsey数的新下界: $R(3,3,15)\geqslant 194$, $R(3,3,16)\geqslant 242$, $R(3,3,21)\geqslant 338$, $R(3,3,22)\geqslant 402$, $R(3,3,23)\geqslant 410$, $R(3,3,25)\geqslant 450$.

关键词 多色 Ramsey数 下界 正则循环图
中图法分类号 O 157.5; TP 312

Abstract The regular prime order circulant graphs was studied. An algorithm to compute lower bounds of multicolor Ramsey numbers $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ was presented. Six new lower bounds of 3-color Ramsey numbers was obtained: $R(3,3,15)\geqslant 194$, $R(3,3,16)\geqslant 242$, $R(3,3,21)\geqslant 338$, $R(3,3,22)\geqslant 402$, $R(3,3,23)\geqslant 410$, $R(3,3,25)\geqslant 450$.

Key words multicolor Ramsey number, lower bound, regular circulant graph

1 多色 Ramsey数

多色 Ramsey数 $R(q_1,q_2,\cdots,q_n)$是具有下述性质的最小正整数 r.用 $n(n\geqslant 3)$种颜色把 r阶完全图 K_r的边任意染色后, K_r中一定存在单色的 K_{q_i},这里 i是 $1,2,\cdots,n$中的某一个.人们早已证明其存在性,但自从 1955年 Greenwood和 Gleason[1]得到 $R(3,3,3)=17$后,人们迄今尚未计算得任何其他多色 Ramsey数的准确值.一般地说,用 n种颜色把 r阶完全图 K_r的各边任意染色要考虑 $n^{r(r-1)/2}$种情形,其运算量随 r的增加呈指数型的增长,当 r较大时即使借助于巨型计算机也很难求得更多的 Ramsey数.

于是人们只好以降低准确度为代价换取运算效率的提高,近 30多年来人们在用构造性的方法研究 Ramsey数的下界时通常采用循环图的方法,即以正 r边形为模型,把长度相同的边和对角线(统称为边)统一染成同一种颜色,理论上要考虑 $n^{[r/2]}$种情形.各国学者借助于功能日益强大的计算机得到 $R(3,3,4)\geqslant 30$, $R(3,3,5)\geqslant 45$, $R(3,4,4)\geqslant 55$和 $R(3,3,3,4)\geqslant 84$等 9个下界[2].改进前人的方法,我们曾给出 $R(3,3,9)\geqslant 90$(《广西计算机应用》1998年第 3期)和 $R(3,3,11)\geqslant 108$[3].

但当 r较大时寻求有效参数构造一般阶的循环图仍然是极其困难的.为此,我们研究了素数阶循环图的同构变换,提出了寻求有效参数构造正则循环图计算多色 Ramsey数的一种算法,得到: $R(3,3,14)\geqslant 182$, $R(3,3,15)\geqslant 192$, $R(3,3,16)\geqslant 234$.

2 素数阶循环图的同构变换

给定整数 $n\geqslant 3$和素数 $p=2m+1$,记 $Z_p=\{-m,\cdots,-1,0,1,\cdots,m\}=[-m,m]$(对于整数 $s\leqslant t$,记 $[s,t]=\{s,s+1,\cdots,t\}$).以下除非另有说明,所有整数及其运算结果都理解为模 p后属于 Z_p,并用通常的等号“=”表示“模 p相等”.

定义 1 对于集合 $S=[1,m]$的一个 n部分拆 $S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$,设 p阶完全图 K_p的顶点集 $V=Z_p$,其边集 E是 Z_p的所有 2元子集的集且有分拆 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$,其中

1998-07-30收稿。
* 广西科学基金资助项目。
** 广西计算中心,南宁市星湖路 32号, 530022(Guangxi Computer Center, 32 Xinghulu, Nanning, Guangxi, 530022)。
*** 广西科学院,南宁市江南路西一里 20号, 530031(Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili, Jiangnanlu, Nanning, Guangxi, 530031)。

$E_i=\{\{x,y\}\in E: |x-y|\in S_i\}$.
把 E 中的边叫做 S_i 色的，再记 K_p 中 S_i 色边所导出的子图为 $G_p(S_i)$, $i\in[1,n]$. 于是我们按照参数集合 $S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$ 把 K_p 的边 n-染色，简记为 $G_p(S)$.

引理 1 设 g 是 p 的一个原根，则对于任意 $j, b\in Z_p$, Z_p 到自身的线性变换 $f: x\mapsto g^j x+b$ 是 $G_p(S)$ 的同构变换:

$f: G_p(S)\mapsto G_p(S^*)$ 并且 $G_p(S_i)\mapsto G_p(S_i^*)$,

$S^*=\bigcup_{i=1}^{n}S_i^*$, $S_i^*=\{|g^j x|: x\in S_i\}$,

其中 $i\in[1,n]$.

证 对于任意 $x,y\in Z_p$，恒有

$f(x)-f(y)=g^j(x-y)$,

即得 $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ 并且有

$|x-y|\in S_i\Leftrightarrow|f(x)-f(y)|=|g^j(x-y)|\in S_i^*$,

因此 f 是顶点集 V 的 1-1 变换，且把 $G_p(S_i)$ 的 S_i 色边变换成 $G_p(S_i^*)$ 的 S_i^* 色边，即得引理 1 的结论. //

图 $G_p(S)$, 从而每个 $G_p(S_i)(i\in[1,n])$, 是一类特殊的 Cayley 图，称为循环图 (circulant graphs, 见《广西计算机应用》1998年第 3期). 按照定义 1, 图 $G_p(S)$ 有分拆 $G_p(S)=\bigcup_{i=1}^{n}G_p(S_i)$, 根据 Ramsey数的定义即得

定理 2 记图 $G_p(S_i)$ 的团数为 $c_i=G_p(S_i)$, $i\in[1,n]$, 则有

$R(c_1+1, c_2+1, \cdots, c_n+1)\geqslant p+1$. //

3 正则循环图

定义 2 称 $|S_i|$ 为子图 $G_p(S_i)$ 的度数. 两个图 $G_p(S)$ 与 $G_p(S^*)$, 其中 $S=\bigcup_{i=1}^{n}S_i$, $S^*=\bigcup_{i=1}^{n}S_i^*$. 如果对于 $i\in[1,n]$ 有 $|S_i|=|S_i^*|$, 就说这两个图的度数是相同的.

考察 $G_p(S)$ 的某个特定的子图 $G_p(S_i)$, 约定其度数 $t=|S_i|\geqslant 2$. 设 g 是 p 的原根，则有

$S=[1,m]=\{|g^j|: j\in S\}$.

因此 $G_p(S_i)$ 的参数集合可表示为

$$S_i=\{|g^{a_j}|: j\in[0, t-1]\}. \quad (1)$$

定义 3 子图 $G_p(S_i)$ 称为正则的，如果参数集合 (1) 满足正则条件

$$\begin{cases} 0=a_0<a_1<\cdots<a_{t-1}\leqslant m & (2)\\ a_1=\min\{a_j-a_{j-1}: j\in[1, t-1]\}<m/(t-1). & (3)\end{cases}$$

含正则子图 $G_p(S_i)$ 的图 $G_p(S)$ 称为正则循环图.

引理 2 任意一个度数大于等于 2的图 $G_p(S)$ 都同构于一个度数相同的正则循环图 $G_p(S^*)$.

证 不失一般性，设集合 (1) 满足 $0<a_0<a_1<\cdots<a_{t-1}\leqslant m$. (4)

引进记号 $a_{t+j}=a_j+m$, $j\in[0,t-1]$. 注意到 g 是 p 的原根有 $g^m=g^{(p-1)/2}=-1$, 从而 $|g^{a_{t+j}}|=|g^{a_j+m}|=|g^{a_j}|$, 因此集合 (1) 可以改写为

$S_i=\{|g^{a_j}|: j\in[0, 2t-1]\}$.

由 (4) 得

$$0<a_0<a_1<\cdots<a_{t-1}\leqslant m<a_t<a_{t+1}<\cdots<a_{2t-1}\leqslant 2m. \quad (5)$$

设 $e=\min\{a_j-a_{j-1}: j\in[0, 2t-1]\}$. (6)

注意到 $a_{t+j}-a_{t+j-1}=a_j-a_{j-1}(j\in[1, 2t-1])$, 故有 $e=\min\{a_j-a_{j-1}: j\in[1, t]\}$. 不妨设 $e=a_h-a_{h-1}$, 这里 h 是 $[1, t]$ 中的某一个. 对于 $G_p(S)$ 作变换 $f: x\mapsto g^{-a_{h-1}}x$, 据引理 1知 $G_p(S)$ 与 $G_p(S^*)$ 同构:

$f: G_p(S)\mapsto G_p(S^*)$, $G_p(S_i)\mapsto G_p(S_i^*)$, 其中

$S_i^*=\{|g^{-a_{h-1}}x|: x\in S_i\}$, $i\in[1, n]\}$,

故有 $S_i^*=\{|g^{a_j-a_{h-1}}|: j\in[0, 2t-1]\}$. 注意到 $|S_i^*|=|S_i|=t$, 因此 S_i^* 可以表示为

$S_i^*=\{|g^{a_{j+h-1}-a_{h-1}}|: j\in[0, t-1]\}=\{|g^{b_j}|: j\in[0, t-1]\}$,

其中 $b_j=a_{j+h-1}-a_{h-1}$, $j\in[0, t-1]$. 由 (5)(6) 得到

$$b_{j+1}-b_j=a_{j+h}-a_{j+h-1}\geqslant e>0,\ j\in[0, t-2], \quad (7)$$

$$0=b_0<b_1=e<b_2<\cdots<b_{t-1}, \quad (8)$$

$$b_1=\min\{b_j-b_{j-1}: j\in[1, t-1]\}, \quad (9)$$

当 $h=1$ 时注意到 $a_0>0$, 由 b_j 的定义有

$b_{t-1}=a_{t-1}-a_0<a_{t-1}\leqslant m$,

当 $2\leqslant h\leqslant t$ 时注意到 $a_{h-2}<a_{h-1}$, 由 b_j 的定义有

$b_{t-1}=a_{t+h-2}-a_{h-1}=m+a_{h-2}-a_{h-1}<m$,

因此当 $h\in[1,t]$ 时恒有 $b_{t-1}<m$. 由 (8) 知数列 $\{b_j: j\in[0,t-1]\}$ 满足不等式 (2). 由 (7)(9) 得

$b_{t-1}=(b_{t-1}-b_{t-2})+(b_{t-2}-b_{t-3})+\cdots+(b_1-b_0)\geqslant e(t-1)$,

即得 $e(t-1)\leqslant b_{t-1}<m\Rightarrow e=b_1<m/(t-1)$. 由 (9) 知数列 $\{b_j: j\in[0,t-1]\}$ 也满足不等式 (3).

综上所述，参数集合 $S_i^*=\{|g^{b_j}|: j\in[0,t-1]\}$. 满足正则条件 (2)(3), 因此图 $G_p(S)$ 同构于具有相同度数的正则循环图 $G_p(S^*)$. //

4 计算多色 Ramsey数下界的算法

约定，集合 $M=[0,m-1]$ 的子集按通常的字典

排列法排列有序.如果两个子集 A 前于 B,记 $A < B$.

给定有序的 n 个整数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, 它们满足 $\sum_{t=1}^{n} t_i = m$.考察集合 M 的 n 部分拆

$T = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$,其中 $|B_i| = t_i, i \in [1, n]$.

所有这样的 n 部分拆构成的集合记为 W.规定两个 n 部分拆

$T = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\} < U = \{B_1^*, B_2^*, \cdots, B_n^*\}$

当且仅当 $B_1 < B_1^*$ 或者存在 $k \in [1, n-1]$ 使 $B_j = B_j^*$ $(j \in [1, k])$ 并且 $B_{k+1} < B_{k+1}^*$.

显然 $(W, \prec)$ 是全序集.以下考察它的一个与正则循环图有关的子集.

定义 4 设 $T = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\} \in W$,其中 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = [0, m-1]$, $B_i = \{a_j: j \in [0, t_i - 1]\}$, $i \in [1, n]$.令

$$S_i = \{|g^{a_j}|: a_j \in B_i\}, \quad S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i.$$

据定义 1作图 $G_p(S)$,称 $G_p(S)$ 为 T 生成的;称

$W_i = \{T \in W$: T 生成的图 $G_p(S)$ 是正则循环图,其子图 $G_p(S_i)$ 是正则$\}$, $i \in [1, n]$ 为 W 的正则子集.

易知 $S = [1, m]$,因此 W_i 是明确定义的有限集,并且是良序的.在实际应用中,n 个正则子集 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 可以随意选用任一个.不失一般性,以下约定只选用 W_1,并设 W_1 的初始元为 T_1,第 $k(1 \leqslant k \leqslant |W_1|)$ 个元为 T_k.

考察 $T_k \in W_1$ 生成的 $G_p(S)$ 的子图 $G_p(S_i)$ $(i \in [1, n])$ 的团数.我们熟知循环图是顶点可迁的,因此 $G_p(S_i)$ 的团数等于 $G_p(S_i)$ 中含顶点 0的团的最大阶,我们只须考察含顶点 0的团.根据定义 1可知这样的团的其他非零顶点是集合 $A_i = \{x: |x| \in S_i\}$ 的元.在图 $G_p(S_i)$ 中,顶点集为 A_i 的导出子图记为 $G_p[A_i]$, $G_p[A_i]$ 的团数记为 $[A_i]$.显然有

$G_p(S_i)$ 的团数 $= [A_i] + 1, i \in [1, n]$.

于是求 $G_p(S_i)$ 的团数就转化为求 $G_p[A_i]$ 的团数.这在实际操作上,通常是借助计算机作辅助运算,且一般都是采用深度优先搜索法 (depth-first search) 进行的.我们知道,用这种方法所需要的运算时间随结点个数的增加而呈指数型的增长,因此计算 $G_p[A_i]$ 的团数要比直接计算 $G_p(S_i)$ 的团数容易得多.

现在给出利用正则循环图计算多色 Ramsey数的下界的算法,步骤如下:

1) 对于给定的整数 $n \geqslant 3$ 和有序的 n 个整数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$,选取适当的素数 $p = 2m+1$,求出 p 的一个原根 g,再选定与 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 相应的 n 个整数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$. (据经验有 $m/13 \leqslant t_i \leqslant m/2$,具体的选取视 p 与 q_i 的大小而定).

2) 据定义 4作 W 的正则子集 W_1.给变元 T_k 的下标赋初始值 $k = 1$.

3) 如果 $k > |W_1|$,运算结束;否则据定义 4作 $T_k \in W_1$ 生成的正则循环图 $G_p(S)$, 此时 $S_i(i \in [1, n])$ 都确定了.设 $i = 1$.

4) 作 $A_i = \{x: |x| \in S_i\}$, 用通常的深度优先搜索法计算 $G_p(S_i)$ 的导出子图 $G_p[A_i]$ 的团数 $[A_i]$.如果 $[A_i] \geqslant q_i - 1$, 令 $k = k+1$,转到 3);否则,令 $i = i+1$,如果 $i \leqslant n$, 转到 4).

5) 此时, $G_p(S)$ 的所有 n 个子图的团数都计算出来了: $G_p(S_i)$ 的团数 $c_i = [A_i] + 1 \leqslant q_i - 1, i \in [1, n]$.由定理 2得到 $R(c_1+1, c_2+1, \cdots, c_n+1) \geqslant p+1$.运算结束.

由于计算 Ramsey数的下界是极其困难的,因此在上述算法中进入 5) 而结束运算的成功的机会并不多,绝大多数的情形是由 4) 转到 3) 时 $k > |W_1|$ 而运算结束,结果是对于选定的度数 $t_i (i \in [1, n])$ 寻求 $R(q_1, q_2, \cdots, q_n) \geqslant p+1$ 的探索得不到预期的结果,这是最坏的情形.此时可考虑选取稍大或稍小的度数 t_i,或者换一个素数 p 重新开始运算.

但上述算法确实是行之有效的.下述两例得到迄今最好的下界 $R(3, 3, 4) \geqslant 30$ 和稍优于 $R(3, 4, 4) \geqslant 55$ 的下界 $R(3, 4, 4) \geqslant 54$.

例 1 $R(3, 3, 4) \geqslant 30$.

取 $n = 3$,素数 $p = 29$ 及其原根 $g = 2$.选取与 $\{q_1, q_2, q_3\} = \{3, 3, 4\}$ 相应的度数 $\{t_1, t_2, t_3\} = \{4, 4, 6\}$.

考察集合 $M = [0, 13]$ 的 3部分拆,据定义 4作正则子集 W_1,起始元为 $T_1 = \{0, 1, 2, 3; 4, 5, 6, 7; 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.从 T_1 开始跑过 $T_2, T_3, \cdots$,进入算法的 3)、4),计算由 $T_k (k = 1, 2, 3, \cdots)$ 生成的正则循环图 $G_p(S)$ 的各子图的团数:由于多次出现某个 $[A_i] \geqslant q_i - 1$,因此算法的过程在 3)、4) 之间循环往复多次.

当 W_1 的元跑到 $T_k = \{0, 2, 7, 9; 1, 3, 8, 10; 4, 5, 6, 11, 12, 13\}$ 时,由算法的 3) 给出

$S_1 = \{1, 4, 10, 12\}$,

$S_2 = \{2, 5, 8, 9\}$,

$S_3 = \{3, 6, 7, 11, 13, 14\}$,

此时由算法的 3) 构造正则循环图 $G_{29}(S)$,由算法 4) 计算得 $[A_1] = [A_2] = 1$, $[A_3] = 2$,进入 5),得到结论 $R(3, 3, 4) \geqslant 30$.运算结束.至此,上述从 1) 开始到 5) 结束运算的整个运算过程所用的 CPU(Pentium 200MMX,下同)时间是 1 s.

例 2 $R(3, 3, 4) \geqslant 54$.

取 $n=3$,素数 $p=53$及其原根 $g=2$.选取与 $\{q_1, q_2, q_3\}=\{4,3,4\}$相应的度数 $\{t_1, t_2, t_3\}=\{10,6,10\}$.仿上述,经过 CPU时间 00 30 04的运算跑到 $T_k=\{0,1,2,4,7,8,9,13,16,22;3,10,14,18,21,25;5,6,11,12,15,17,19,20,23,24\}$,得到有效参数集合为 $S_1=\{1,2,4,9,10,16,18,22,23,25\}$, $S_2=\{5,6,7,8,17,26\}$, $S_3=\{3,11,12,13,14,15,19,20,21,24\}$.由算法的 4)经过不到 1 s的运算,得到 $[A_1]=2$, $[A_2]=1$, $[A_3]=2$.进入 5),得到结论 $R(4,3,4)\geqslant 54$.运算结束.

5 定理 1的证明

利用循环图计算多色 Ramsey数下界的困难主要来自两个方面,其一是寻求有效参数构造循环图;其二是计算 $G_p(S)$的各子图的团数.由例 2可以看到,对于“小 Ramsey数”而言,上述困难的前者与后者所用的运算时间之比一般高达数千倍甚至上万倍.由于我们的算法已经对怎样寻求有效参数和计算各子图的团数作出了具体的阐述,因此在这里叙述定理 1的证明时我们只写出其中最关键的部分,即构造 $G_p(S)$的各子图的有效参数的集合 S_i.注意到 $S=\bigcup_{i=1}^{n} S_i=[1,m]$,因此 S_n不必写出来.

1) 取 $n=3$,素数 $p=193$及其原根 $g=5$,图 $G_{193}(S)$的各子图的参数集合为

$S_1=\{2,5,13,19,22,25,31,45,54,61,65,68,77,88,89,95\}$

$S_2=\{1,4,7,12,15,17,26,28,37,46,48,57,59,62,70,73,81,91\}$

按照算法的 4)经过 17 min 03 s的运算,得到 $[A_1]=[A_2]=1$, $[A_3]=13$,因此得到结论 $R(3,3,15)\geqslant 194$.

2) 取 $n=3$,素数 $p=241$及其原根 $g=7$,图 $G_{241}(S)$的各子图的参数集合为

$S_1=\{1,5,8,23,27,36,43,47,57,61,73,76,85,87,91,98,102,105,115,117\}$

$S_2=\{7,9,11,37,38,60,65,68,70,78,82,83,84,86,96,104,109,110,112,114\}$

按照算法的 4)经过 21 min 05 s的运算,得到 $[A_1]=[A_2]=1$, $[A_3]=14$,因此得到结论 $R(3,3,16)\geqslant 242$.

3) 取 $n=3$,素数 $p=337$及其原根 $g=10$,图 $G_{337}(S)$的各子图的参数集合为

$S_1=\{7,19,22,25,39,42,43,52,53,55,56,70,79,83,87,93,103,114,116,124,137,150,152,154\}$

$S_2=\{1,5,11,30,40,47,49,57,59,66,69,76,85,88,92,102,111,117,119,121,127,129,136,146,148,156,162,165\}$

按照算法的 4)经过 29 min 30 s的运算,得到 $[A_1]=[A_2]=1$, $[A_3]=19$,因此得到结论 $R(3,3,21)\geqslant 338$.

4) 取 $n=3$,素数 $p=401$及其原根 $g=3$,图 $G_{401}(S)$的各子图的参数集合为

$S_1=\{15,25,38,42,44,46,48,65,75,78,87,95,97,99,101,104,105,106,108,115,118,127,132,134,136,155,158,167\}$

$S_2=\{1,4,7,9,20,22,28,39,45,55,57,63,69,80,92,98,103,113,116,128,130,140,146,151,154,159,165,177,180,188,194\}$

按照算法的 4)经过 31 min 07 s的运算,得到 $[A_1]=[A_2]=1$, $[A_3]=20$,因此得到结论 $R(3,3,22)\geqslant 402$.

5) 取 $n=3$,素数 $p=409$及其原根 $g=21$,图 $G_{409}(S)$的各子图的参数集合为

$S_1=\{21,29,30,34,45,46,48,57,65,71,72,81,89,104,107,109,112,131,140,148,156,159,167,168,173,187,199,200\}$

$S_2=\{1,6,10,13,31,38,40,47,49,54,58,66,73,90,99,102,110,114,117,138,143,147,158,162,170,177,179,186,188,191,195,203\}$

按照算法的 4)经过 33 min 57 s的运算,得到 $[A_1]=[A_2]=1$, $[A_3]=21$,因此得到结论 $R(3,3,23)\geqslant 410$.

6) 取 $n=3$,素数 $p=449$及其原根 $g=3$,图 $G_{449}(S)$的各子图的参数集合为

$S_1=\{38,45,65,72,79,82,84,89,91,95,96,99,102,104,106,109,111,115,116,119,123,126,128,135,139,143,146,148,150,152,159,172,189,196,209,216\}$

$S_2=\{1,3,5,11,13,17,27,36,42,52,58,67,76,83,92,98,108,114,120,122,151,153,155,157,161,167,169,171,173,177,185,192,201,208,210,217\}$

按照算法的 4)经过 38 min 35 s的运算,得到 $[A_1]=[A_2]=1$, $[A_3]=23$,因此得到结论 $R(3,3,25)\geqslant 450$.

6 附注

1) 现在人们在寻求二色 Ramsey数的下界时,已

经注意到利用素数阶的循环图而不是一般阶的循环图[4], 在文献 [4]中还对这样做的好处进行了论证. 但其并未曾探索到素数阶循环图的更多性质,所得到的 4个下界 $R(5,7)\geqslant 80$, $R(5,9)\geqslant 114$, $R(4,12)\geqslant 98$和 $R(4,15)\geqslant 128$中,前 2个是目前最好的,而后 2个则不然.我们在文献 [5]中得到 $R(5,9)\geqslant 114$与文献 [4]持平,在文献 [6]中得到 $R(4,12)\geqslant 128$盖过了文献 [4]的后两个结果. 至于利用素数阶循环图寻求多色 Ramsey数的下界, 除了我们在文献 [3]和《广西计算机应用》(1998年第 3期)中获得的结果外, 目前尚未见有其他报道. 在文献 [7]中得到的 $R(3,3,4)\geqslant 30$和在文献 [8]中得到的 $R(3,3,3,4)\geqslant 84$都是利用一般阶循环图的方法而获得的.

2) 由于 $|W_1|<|W|$,因此利用正则循环图可以避免大量同构的图的重复计算. 由定义 3的正则条件 (2)(3) 可知 a_1只须在很小的范围内变动,并且当 $a_1>1$时集合 $\{a_j: j\in[0,t_1-1]\}$的各元递增的步长 $\geqslant a_1>1$,使这个集合能够更快地跑过 $[0,m-1]$的 t_1元子集,从而 T_k能够更快地跑过集合 W_1,运算量大大减少了,寻求有效参数的运算就具有较高的效率. 此外,我们在计算 $G_p(S)$中各子图 $G_p(S_i)$的团数方面也有所改进,计算 $[A_i]$能够节省回溯 (backtracking)的运算量. 因此, 上述算法在寻求多色 Ramsey数的下界时具有较高的运算效率.

参考文献

1 Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs. Canadian Journal of Mathematics, 1995, 7. 1- 7.

2 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 1994, DS1, updated on 7/16/1997.

3 罗海鹏, 苏文龙. 经典三色 Ramsey数 $R(3,3,11)$的新下界. 广西科学院学报, 1998, 14 (3): 1- 2.

4 Calkin N J, Erdös P, Tovey C A. New Ramsey bounds from cyclic graphs of prime order. Slam J Discrete Math, 1997, 10 381~ 387.

5 苏文龙, 罗海鹏, 张正铀. Ramsey数 $R(5,9)\geqslant 114$. 广西科学, 1997, 4 (3): 178.

6 苏文龙, 罗海鹏, 李 乔. 经典 Ramsey数 $R(4,12)$, $R(5,11)$和 $R(5,12)$的新下界. 科学通报, 1997, 42(22): 2460.

7 Kalbfleisch J G. Chromatic graphs and Ramsey theorem. Ph. D. thesis, University of Waterloo, January 1966.

8 Exoo G. Constructing Ramsey graphs with a computer. Congressus Numerantium, 1987, 59. 31- 36.

(责任编辑: 黎贞崇)

一个猎手—— 食饵系统的行波解

谷 元 陈登远 谷 艺

我们使用 Painlevé 分析的方法研究了一个两个种群的猎手 - 食饵系统[1]

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx} + uM(u,v), \\ v_t(x,t) &= \mathrm{U}v_{xx} + vN(u,v), \end{aligned} \tag{1}$$

这里

$$\begin{aligned} M(u,v) &= (u-d)(1-u) - kv, \\ N(u,v) &= -a - bv + ku, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 a, b, k和 d皆为正常数,并且 $0<d<\frac{a}{k}<1$. 令 $u=\sum_{j=0}^{1} u_j \mathrm{H}^{j-1}$, $v=\sum_{j=0}^{2} v_j \mathrm{H}^{j-2}$, H为待定函数. 把 u,v代入 (1),可以求出 H_j 的系数, 还可以把 a, b用 U,k和 d表出.为了使得 $a>0, b>0, 0<d<\frac{a}{k}<1$, 我们发现, 必须

1 $0<d<\frac{3}{5}$, $(\mathrm{U},k)\in D_1\cup D_2$,

2 $0\leqslant d<\frac{9}{10}$, $(\mathrm{U},k)\in D_1$,

其中

$$D_1(\mathrm{U},k) = \{\frac{1}{2}<\mathrm{U}<\frac{3}{5}, \frac{6\mathrm{U}d}{5\mathrm{U}-1}<k<\min(\frac{9}{5},\frac{3}{2}(d+1))\}.$$

$$D_2(\mathrm{U},k) = \{\frac{3}{5}<\mathrm{U}<\infty, 2d<k<\frac{6\mathrm{U}}{5\mathrm{U}-1}\}.$$

我们得到 $\mathrm{H}=A+Be^{-2Q(x-Ct)}$,从而构造出系统 (1)的如下行波解

$$u = -2BQ\sqrt{2-\frac{6\mathrm{U}k}{b}}\,\frac{e^{-Q(x-Ct)}}{Ae^{Q(x-Ct)}+Be^{-Q(x-Ct)}}, \tag{3}$$

$$v = \frac{24B^2Q^2\mathrm{U}}{b}\left(\frac{e^{-Q(x-Ct)}}{Ae^{Q(x-Ct)}+Be^{-Q(x-Ct)}}\right)^2, \tag{4}$$

其中 A, B为任意常数, C和 Q可以用 U,k和 d表示.

这种方法可以应用于许多非线性偏微分方程的求解.

参考文献

1 Smoller J. Shock waves and reaction-diffusion, Berlin Springer-Verlag, 1980.

(第一作者单位: 山东工业大学计算机系)