DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1998.02.016

Ramsey数 R (6, n) 的三个下界*
Lower Bounds of Three Ramsey Numbers R (6, n)

苏文龙　　罗海鹏**
Su Wenlong　　Luo Haipeng
(广西梧州一中　梧州　543002)
(Guangxi Wuzhou No. 1 Middle School, Wuzhou, Guangxi, 543002)

摘要　构造3个新的素数阶循环图.从而得到3个 Ramsey数的下界: $R(6,15)\geqslant 272$, $R(6,16)\geqslant 308$, $R(6,17)\geqslant 422$.

关键词　Ramsey数　下界　素数阶循环图
中图法分类号　O 157.5; TP 312

Abstract　Three new prime order cyclic graphs are structured. Lower bounds of three Ramsey numbers are obtained: $R(6,15)\geqslant 272$, $R(6,16)\geqslant 308$, $R(6,17)\geqslant 422$.

Key words　Ramsey number, lower bound, prime order cyclic graph

右图是一个5个顶点的完全图 (5点团), 其中有些顶点用实线相连, 构成一个循环图, 其他用虚线相连. 容易验证, 在这个图中既没有实线的3点团 K_3, 也没有虚线的3点团(3独立点集 $\bar{K}_3$),因此,要想在一个图中无论怎样联边都一定有 K_3 或 $\bar{K}_3$,则这个图要有6个顶点以上才可能. 这个问题的类似问题是英国科学家 Ramsey首先提出来的. 因此被后人称为 Ramsey数问题. 上面提到的这个6被认为是一定有 K_3或 $\bar{K}_3$存在的可能的最小的顶点数, 也称作 Ramsey数的下界, 我们把这个结论简记为 $R(3,3)\geqslant 6$. 实际上有 $R(3,3)=6$.

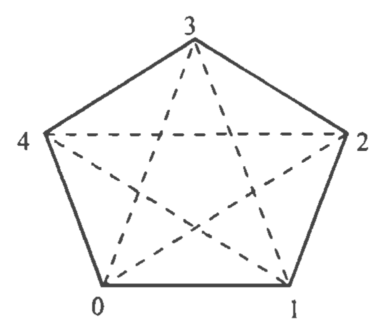
推广到一般的情形: 求一个最小的整数 $R(m,n)$ $(m\geqslant 2, n\geqslant 2)$,使得任何有 $R(m,n)$ 个顶点的图一定含有 m 点完全图 K_m 或者 n 独立点集 $\bar{K}_n$,这个最小的整数 $R(m,n)$ 被称为 Ramsey数.

1　已知的 Ramsey数 R (6, n) 的下界

Ramsey数 $R(6,n)$ 的下界,仅知道下面的5个: $R(6,3)=18$[1]. $R(6,4)\geqslant 35$[2], $R(6,5)\geqslant 58$[2], $R(6,6)\geqslant 102$[3], $R(6,17)\geqslant 420$[4]. 根据文献[5],其他的 $R(6,n)$ 的下界目前都还是未知的.

1997-09-05收稿.
* 广西科学基金资助项目.
** 广西科学院,南宁市江南路西一里20号, 530031 (Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili, Jiangnanlu, Nanning, Guangxi, 530031).

我们应用数论和群论的一些方法,研究了素数阶循环图, 给出了有效的算法, 获得了若干 Ramsey数的新下界[6~8]. 本文进一步改进了研究方法, 改进了计算机程序, 从而获得了3个 Ramsey数的新下界.



2　Ramsey数 R (6, 15)、R (6, 16) 和 R (6, 17) 的新下界

定义　对于给定的素数 p,记 $Z_p=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$,选定参数集合 $S\subset\{1,2,\cdots,(p-1)/2\}$. 设图 G 的顶点集 $V_G=Z_p$. 边集规定为: 两个顶点 x 和 y 相邻当且仅当 $\min\{|x-y|, p-|x-y|\}\in S$. 我们称图 G 为关于参数集合 S 的 p 阶循环图并记为 $G_p(S)$.

据此我们构造了三个素数阶循环图.

1) 给定素数 $p_1=271$ 与参数集合

$S_1=\{1, 6, 7, 8, 10, 13, 15, 17, 27, 33, 36, 38, 43, 44, 46, 47, 48, 55, 58, 59, 60, 62, 64, 70, 72, 73, 74, 77,$

(下转第134页 Continue on page 134)

整理可得式(3).

4 实例

用 Shepard插值方法编制的 C语言程序已在微机上运行通过.

例: $f(x,y) = 0.75\exp[-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2]+0.75\exp[-(9x+1)^2/49-(9y+1)/10]+0.5\exp[-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2]-0.2\exp[-(9x-4)^2-(9y-7)^2]$

方法: 从给定函数上随机取36个型值点,然后利用 Shepard方法计算给定网格上 23个点的值,并与函数值进行比较,具体见表1,表2.

5 结语

一般来说,曲线和曲面的拟合通过参数化的隐式形式来表示,通过参数的消去,参数形式是隐式的特例.隐式形式不仅有紧凑的表达形式而且具有几何运算下的封闭性.任何参数形式或隐式形式的曲线曲面之间的几何运算(求和、求差或交以及偏移(offset))的结果均可表成隐式形式.本文避开隐式形式的复杂性,用 Shepard曲面和加权最小二乘曲面来实现三维空间散乱数据点所围成的曲顶实体体积的计算.

参考文献

1 苏步青,刘鼎元著.计算几何.上海:上海科技出版社,1992.
2 李岳生,黄友谦编.数值逼近.北京:人民教育出版社,1991.
3 复旦大学数学系编.数学分析.北京:高等教育出版社,1991.
4 Bajaj C, Xu G. Piecewise rational approximations of real agebraic curves, J Comp Math, 1997, 15(1): 55~71.
5 BaBaj C, Xu G. Regular algebraic curve segments (III) - Applications in dada fitting, Research Report ICM-96-10, Institute of Computational Mathematics, Chinese Academy of Sciences, 1996.
6 徐国良.CAGD中的隐式曲线与曲面.数值计算与计算机应用,1997,2.

(责任编辑:黎贞崇 蒋汉明)

(上接第13页 Continue from page 131)

78, 80, 82, 83, 84, 86, 89, 93, 95, 98, 100, 101, 102, 104, 109, 112, 113, 117, 121, 126, 130, 134}.

2) 给定素数 $p_2 = 307$ 与参数集合

$S_2 = \{1, 5, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 27, 30, 33, 35, 37, 42, 46, 47, 52, 53, 55, 64, 69, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 81, 85, 86, 90, 93, 96, 97, 98, 100, 104, 114, 118, 119, 122, 126, 128, 131, 139, 140, 142, 143, 149, 152\}$.

3) 给定素数 $p_3 = 421$ 与参数集合

$S_3 = \{1, 2, 3, 5, 7, 13, 21, 24, 26, 27, 29, 32, 34, 35, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 58, 59, 65, 67, 68, 70, 75, 76, 80, 82, 83, 86, 87, 88, 91, 92, 97, 99, 103, 109, 113, 119, 125, 129, 132, 133, 134, 137, 142, 144, 145, 146, 148, 151, 152, 154, 162, 164, 165, 169, 173, 181, 184, 188, 197, 198, 201, 203, 206, 207\}$.

我们在计算机上验证了:如前定义的素数阶循环图 $G_{271}(S_1)$ 中既不含 6点团 K_6,也不含 15独立点集 $\bar{K}_{15}$;素数阶循环图 $G_{307}(S_2)$中既不含 6点团 $\bar{K}_6$,也不含 16独立点集 $\bar{K}_{16}$;素数阶循环图 $G_{421}(S_3)$ 中既不含 6点团 $\bar{K}_6$,也不含 17独立点集 $\bar{K}_{17}$.由于这些结论并据 Ramsey定理,我们就证明了

定理1 $R(6, 15) \geqslant 272, R(6, 16) \geqslant 308, R(6, 17) \geqslant 422$.

上述第三个结果超过了目前已知的最好结果 $R(6, 17) \geqslant 420$[4],其他2个结果填补了文献[5]中的有关 Ramsey数下界的两个空白.

参考文献

1 Kalbfleisch J G. Chromatic graphs and Ramsey's theorem. Ph D thesis, University of Waterloo, January, 1996.
2 Exoo G. Announcement: On the Ramsey numbers $R(4,6)$, $R(5,6)$ and $R(3,12)$. Ars Combinatoria, 1993, 35: 85.
3 Kalbfleisch J G. Construction of special Edge-Chromatic Graphs. Canadian Mathematical Bulletin, 1965, 8: 575~584.
4 罗海鹏,苏文龙. Ramsey数 $R(6,n)$的两个下界.计算机应用研究,1997,(6): 27~28.
5 Radziszowski S P. Small Ramsey numbers. The Electronic Journal of Combinatorics 1 (1994), DS1: 1~17. Revision #4 July 16. 1997.
6 苏文龙,罗海鹏,李乔.经典 Ramsey数 $R(4,12)$、$R(5,11)$和 $R(5,12)$的新下界.科学通报,1997,42(22): 2460.
7 苏文龙,罗海鹏,吴康.经典 Ramsey数 $R(5,12)$、$R(5,13)$、$R(5,14)$和 $R(5,15)$的新下界.广西大学学报,1997,22(4): 298~299.
8 罗海鹏,苏文龙. Ramsey数 $R(6,n)$的两个下界.广西科学,1997,4(3): 183~185.

(责任编辑:黎贞崇)