

一类多分子反应模型的相图

The Phase Diagram of a Multimolecule Model

杨启贵

Yang Qigui

(广西师范大学数学与计算机科学系 桂林市育才路 3号 541004)

(Dept. of Math. and Computer Sci., Guangxi Normal Univ., 3 Yucailu, Guilin, Guangxi, 541004)

摘要 对一类多分子反应模型 $\dot{x} = 1 - Tx - x^p y^q, \dot{y} = Uy(x^p y^{q-1} - 1)$ 进行定性分析,在第一象限奇点无法具体求出的条件下,讨论了轨线的有界性,分界线的位置关系以及极限环的存在性和不存在性.

关键词 分界线 极限环 相图

Abstract The author considers a multimolecules model $\dot{x} = W - ax - x^p y^q, \dot{y} = x^p y^q - by$ where $x \geq 0, y \geq 0, W, a, b, p$ and q are positive constants. Under the conditions that the concrete expression of its singularities are not sloved, we discuss the bounded property of trajectories, separatrix configuration, nonexistence and existence of limit cycle.

Key words separatrix, limit cycle, phase diagram

中图法分类号 O 175.1

关于多分子反应模型^[1]

$$\begin{cases} \dot{x} = W - ax - x^p y^q \\ \dot{y} = x^p y^q - by \end{cases} \quad (M)$$

其中 $x \geq 0, y \geq 0, a \geq 0; b, W, p, q$ 为正常数. 当 $a \geq 0, p, q$ 为特殊值时, 已有文献^[1~8] 进行定性分析, 这些研究的前提是第一象限内奇点能具体求出, 但当 $a > 0$ 时, 第一象限的奇点一般是无法求出. 文献 [9] 对 $a > 0, p, q$ 为正整数时进行了讨论, 得到第一象限内的全局相图. 本文目的就是取消文献 [9] 的限制, 即研究了 $a \geq 0, p$ 为自然数或大于零常数, q 为正常数时的系统 (M), 获得了第一象限内的全局相图. 所得结果以文献 [9] 为特殊例.

对 (M) 作变换 $\bar{x} = W^{\frac{q-1}{p}} b^{-\frac{q}{p}} x, \bar{y} = bW^{-1} y, f = W^{\frac{q-1}{p}} b^{-\frac{q}{p}} t$, 记 $T = ab^{\frac{q}{p}} W^{\frac{q-1}{p}}, U = b^{\frac{q}{p}} W^{\frac{q-1}{p}}$, 仍以 x, y, t 记 \bar{x}, \bar{y}, f , 则 (M) 化为

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - Tx - x^p y^q \\ \dot{y} = Uy(x^p y^{q-1} - 1) \end{cases} \quad (1)$$

其中 T, U, p, q 为正常数, $\frac{T}{U} = \frac{a}{b}$.

1 局部分析

定理 1 对任意 $T \geq 0, U > 0, p > 0$, 则当 $0 < q$

≤ 1 时系统 (1) 无闭轨.

证 由 x 轴是轨线, 因而若 (1) 有闭轨 V , 则 V 与 x 轴相交. 进一步, 当 $y > 0$ 时, 对系统 (1) 取 $B(x, y) = y^{-q}$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(BP, BQ) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 - Tx - x^p y^q}{y^q} \right) + \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{U(x^p y^q - y)}{y^q} \right] = -\frac{T}{y^q} - px^{p-1} - (1-q)y^{-q} \leq 0 \end{aligned}$$

且在任何区域内不恒为零, 故系统 (1) 无闭轨.

为研究系统 (1) 的极限环, 只需考虑 (1) 在 $q > 1, T, U, p$ 为正常数情形.

对于系统 (1), x 轴是轨线且 x 轴上的奇点为 $(\frac{1}{T}, 0)$. 易知

定理 2 对任意 $T, U, p > 0$, 则当 $q \geq 1$ 时, 奇点 $(\frac{1}{T}, 0)$ 是 (1) 的不稳定的初等奇点.

系统 (1) 在第一象限内的奇点由函数 $F(x) = 1 - Tx - x^{-\frac{p}{q-1}}$ 的根和 $y = x^{-\frac{p}{q-1}}$ 所决定. 当 $q > 1$ 时, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是凸函数, 当 $x \rightarrow 0$ 或 $x \rightarrow +\infty$ 时, $F(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x_0 = [\frac{T(q-1)}{p}]^{-\frac{q-1}{p}}$ 时, $F(x)$ 取最大值. 其最大值为 $F(x_0) = 1 - [\frac{T(q-1)}{p}]^{\frac{p}{p(q-1)}} [(\frac{q-1}{p})^{-\frac{q-1}{p}} + 1]$. 记 $T_0 = \frac{p}{q-1} [(\frac{q-1}{p})^{-\frac{q-1}{p}} + 1]^{-\frac{p+q-1}{p}}$.

当 $T > T_0$ 时,系统 (1) 在第一象限内无奇点.

当 $T = T_0$ 时, $F(x_0)$ 是重根. 这时系统 (1) 在第一

象限内有唯一奇点 $A_0(x_0, y_0) = \left(\left[\frac{T(q-1)}{p} \right]^{-\frac{q-1}{p}}, \left[\frac{T(q-1)}{p} \right]^{\frac{p}{q-1}} \right)$.

当 $0 < T < T_0$ 时,系统 (1) 在第一象限内有两个奇点 $A_1(x_1, y_1)$ 和 $A_2(x_2, y_2)$, 其中 x_i 是 $F(x_i) = 0$ 的根, $y_i = x_i^{-\frac{p}{q-1}}$ ($i = 1, 2$), $x_1 < x_0 < x_2$.

定理 3 对 $p > 0, U > 0, q > 1$, 当 $T = T_0$ 时, 则

(i) 若 $U \neq \frac{q}{q-1} T_0$, 系统 (1) 在第一象限唯一奇点 $A_0(x_0, y_0)$ 是鞍结点;

(ii) 若 $U = \frac{q}{q-1} T_0$, 系统 (1) 在第一象限唯一奇点 $A_0(x_0, y_0)$ 是退化奇点.

证 作变换 $x = a - x_0, y = Z - y_0$, 仍以 x, y 记 a, Z , 则把奇点 A_0 变换到原点

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - T_0(x + x_0) \\ \quad - (x + x_0)^p (y + y_0)^q \triangleq f(x, y) \\ \dot{y} = U[(x + x_0)^p (y + y_0)^q \\ \quad - (y + y_0)] \triangleq g(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

$f(x, y), g(x, y)$ 在原点的 Taylor 展式为

$$f(x, y) = -T_0qx - qy - \sum_{i \geq 2} k_i(x, y)$$

$$g(x, y) = T_0U(q-1)x + U(q-1)y + \sum_{i \geq 2} k_i(x, y)$$

其中 $k_i(x, y)$ 为关于 x, y 的 i 次齐次多项式.

$$k_2(x, y) = \frac{q(q-1)}{2} x_0^p y_0^{q-2} y^2 + pqx_0^{p-1} y_0^{q-1} xy +$$

$$\frac{p(p-1)}{2} x_0^{p-2} y_0^q x^2$$

(i) 由 $U \neq \frac{q}{q-1} T_0$ 得 0 为单重特征根, 对系统

(1) 作变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{q}{T_0q - U(q-1)} \begin{pmatrix} -\frac{U(q-1)}{q} & -1 \\ T_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{cases} \dot{u} = \tilde{g}(u, v) \\ \dot{v} = [-T_0q + U(q-1)]v - \frac{q(U - T_0)}{U} \tilde{g}(u, v) \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u, v) &= -\frac{U}{T_0q - U(q-1)} \sum_{i \geq 2} k_i(x, y) \Big|_{\substack{x = -\frac{U}{T_0} \frac{u}{q} \\ y = \frac{U(q-1)}{q} v}} \\ &= x_0^{p-2} y_0^{q-2} \left[\frac{q(q-1)}{2} x_0^2 T_0^2 - pqx_0 y_0 T_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{p(p-1)}{2} y_0^2 \right] u^2 + \dots \end{aligned}$$

由于 $\frac{q(q-1)}{2} x_0^2 T_0^2 - pqx_0 y_0 + \frac{p(p-1)}{2} y_0^2 = \frac{1}{2} T_0^{\frac{2p}{q-1}} \left(\frac{q-1}{p} \right)^{\frac{-2(q-1)}{p}} (1-q) \left(1 + \frac{q-1}{p} \right)$, 因此 $\tilde{g}(u, v)$ 中的 u^2 系数小于 0, 由文献 [10] 第 2 章定理 7.1 知奇点为鞍结点.

(ii) 若 $U = \frac{q}{q-1} T_0$, 则特征值 0 为重根, 对 (1) 作变换

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_0q & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \dot{u} = v - \sum_{i \geq 2} k_i(u, -T_0u - \frac{1}{q}v) \\ \dot{v} = q(T_0 - U) \sum_{i \geq 2} k_i(u, -T_0u - \frac{1}{q}v) \end{cases}$$

易证 $k_2(u, -T_0u - \frac{1}{q}v)$ 中 u^2 的系数不为 0, 根据文献 [10] 第二章定理 7.3 中 $m = 1, k = 2m$ 的情形知奇点 A_0 为退化奇点.

定理 4 对 $p > 0, U > 0, q > 1$, 当 $0 < T < T_0$ 时, 则第一象限为

(i) 右侧奇点 $A_2(x_2, y_2)$ ($x_2 > x_0$) 恒为初等鞍点;

(ii) 左侧奇点 $A_1(x_1, y_1)$ ($x_1 < x_0$);

i) 当 $U(q-1) < T_+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$ 时, A_1 为稳定的初等焦点或结点;

ii) 当 $U(q-1) > T_+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$ 时, A_1 为不稳定的初等焦点或结点;

iii) 当 p 为自然数, $U(q-1) = T_+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$ 时, A_1 为细焦点.

证 对奇点 (x_i, y_i) , 系统 (1) 在 (x_i, y_i) 的线性系数矩阵为

$$M_i = \begin{pmatrix} -T_- px_i^{-\frac{p+q-1}{q-1}} & -q \\ Upx_i^{-(1+\frac{p}{q-1})} & U(q-1) \end{pmatrix} \quad i = 1, 2$$

其行列式 $\det M_i = U(q-1)F'(x_i)$.

(i) 当 $i = 2$ 时, 得 $\det M_2 = U(q-1)F'(x_2) < 0$, 由此知特征根为一正一负, 从而 A_2 是初等鞍点.

(ii) 当 $i = 1$ 时, $\det M_1 = U(q-1)F'(x_1) > 0$, 由此知.

i) 当 $U(q-1) < T_+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$ 时, A_1 为稳定的焦点或结点;

ii) 当 $U(q-1) > T_+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$ 时, A_1 为不稳定的焦点或结点;

iii) 当 $U(q-1) = T_+ px_1^{-(1+\frac{p}{q-1})}$ 时, A_1 为 (1) 的线性近似方程的中心. 当 p 为自然数时, 将在全局分析中证明 A_1 为细焦点.

注 由定理 3 知,要研究系统 (1) 的极限环,只需考察参数区间 $0 \leq T < T_0$.

2 全局分析

定理 5 对 p, q, T, U 为正常数,则系统 (1) 的轨线在第一象限内正向有界.

证 根据系统 (1) 知,过正 y 半轴的轨线正向进入第一象限.当 $x > \frac{1}{T}$ 时, $\frac{dx}{dt} = 1 - Tx - x^p y^q < 0$, 因此 $x(t)$ 有界.又 $\frac{d(Ux + y)}{dt} = U - TUx - Uy \leq U - \min(T, U)(Ux + y)$, 由比较定理知 $Ux(t) + y(t) \leq \frac{U}{\min(T, U)} + ce^{-\min(T, U)t}$ ($t > 0$), 于是 $Ux(t) + y(t)$ 有界, 又因 $x(t)$ 有界, 故 $(x(t), y(t))$ 有界.

推论 1 赤道与正 x 轴 (x 充分大) 形成的第一象限内的无穷远扇形是正向不稳定的抛物扇形.

定理 6 若 p 为自然数, T, U 为正常数, 则当 $q \geq 1$ 时第一象限内有唯一轨线负向趋于 y 轴方向的无穷远点.

证 作 Poincaré 变换 $x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z}$, 则系统 (1) 可化为

$$\begin{cases} \dot{z} = -zU(v^p - z^{p+q-1}) \\ \dot{v} = z^{p+q} - Tvz^{p+q-1} - v^p - Uv^{p+1} + Uz^{p+q-1} \end{cases} \quad (3)$$

分析 (3) 的奇点 $(0, 0)$, 由 p 为自然数, $q \geq 1$ 时可知, 只有 z 轴, v 轴方向为特殊方向, 沿 v 轴方向 (即赤道) 有唯一轨线正向进入奇点.

下证在 (z, v) 平面的第一象限内有唯一轨线负向进入奇点.

由 (3) 知, 在正 z 轴上有 $\frac{dz}{dv}|_{z=0} = U > 0$, 垂直等倾线 L 为 $v^p = z^{p+q-1}$, 在第一象限内的 $v^p < z^{p+q-1}$ 区域内, 恒有 $\dot{z} > 0$.

考虑曲线 $l: v^{p+1-l} = z^{p+q-1}$ ($0 < l < \frac{q}{p+q}$), 它位于垂直等倾线的下方, 在该曲线上

$$\begin{aligned} \dot{z}|_l &= -zU(v^p - z^{p+q-1})|_l \\ &= -zU[z^{\frac{(p+q-l)p}{p+q}} - z^{p+q-1}] \\ &= Uz^{p+q} + O(z^{p+q}) \\ \dot{v}|_l &= [z^{p+q} - Tvz^{p+q-1} - v^p - Uv^{p+1} \\ &\quad + Uz^{p+q-1}]|_l \\ &= z^{p+q} + O(z^{p+q}) \end{aligned}$$

因此 $\frac{dz}{dv}|_l = \frac{Uz^{p+q} + O(z^{p+q})}{z^{p+q} + O(z^{p+q})} > 0$, 于是当 z 充分小时, 系统 (3) 的轨线向上穿过曲线 l .

下面的证明可以完全重复文献 [9] 的命题 4 的证明即可得第一象限内有唯一负半轨线负向趋于 y 轴方向的无穷远点. 证毕.

由上知, (z, v) 第一象限内唯一负向进入奇点的轨线是奇点双曲扇形的分界线, 对于系统 (1), 称之为无穷远分界线.

定理 7 若 $T > 0, p$ 是自然数, $q > 1, U$ 充分大, 则第一象限的无穷远分界线的 k 极限集是 x 轴上的有限奇点 $(\frac{1}{T}, 0)$.

证 完全类似文献 [9] 的命题 5 证明即得定理 7.

定理 8 若 $0 < T < T_0, U > 0, p > 0, q \geq 1$ 时, 则

(i) 鞍点 $A_2(x_2, y_2)$ 的左侧分界线在 $x^p y^{q-1} < 1$ 区域内的部分, 随着 T 的增加向上或右侧运动, 且对不同的 T , 它们不相交;

(ii) 当 p 为自然数时, 系统 (1) 的无穷远分界线在 $x^p y^{q-1} < 1$ 内的部分随着 T 的增加向下或左侧运动.

证 由系统 (1) 易知, 在第一象 $x^p y^{q-1} < 1$ 的区域内, 向量场随着 T 的增加负向旋转, 鞍点 $A_2(x_2, y_2)$ 的位置随着 T 的增大沿着水平等倾线向上运动, 由比较法易得定理 8 成立.

定理 9 若 $p > 0, q > 1, U > 0$, 对参数 U , 则存在 U_1 和 U_2 使得

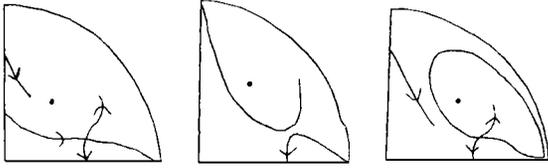
(i) 当 $U < U_1$ 时, 对 $0 < T < T_0$, 鞍点 A_2 的左侧稳定的分界线与 y 轴相交;

(ii) 当 $U > U_2$ 时, 对 $0 < T < T_0$, 鞍点的左侧稳定的分界线穿过水平等倾线且它的 T 极限集是 x 轴方向的无穷远点;

(iii) 当 p 为自然数, $U \in [U_1, U_2]$ 时, 存在唯一的 $T(U)$ 使得当 $T = T(U)$ 时, 鞍点分界线与无穷远分界线重合, 当 $T < T(U)$ 时, 鞍点分界线与 y 轴相交, 当 $T > T(U)$ 时, 鞍点分界线穿过水平等倾线, 且它的 T 极限集是 x 轴方向的无穷远奇点.

证 对系统 (1), 在直线 $y = 1 - Tx$ 上轨线的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}|_{y=1-Tx} = -U$, 与 $y = 1 - Tx$ 的斜率比较可得, 当 $T = U$ 时, 直线 $y = 1 - Tx$ 是轨线, 当 $T > U$ 时, 由轨线穿过直线 $y = 1 - Tx$ 的方向得鞍点 A_2 的左侧稳定的分界线与 y 轴的交点小于 1. 根据定理 7 定理 8 得证定理 9.

推论 2 当 p 为自然数, $q > 1, 0 < T < T_0, U > 0$ 时, 系统 (1) 的分界线的相图有三种拓朴结构.



推论 3 若 p 为自然数, $q > 1, 0 < T < T_0, U > 0$ 时, 则系统 (1) 的非鞍奇点的线性部分为中心时必为细焦点.

证 由分界线相图和文献 [11] 的定理 3 即可得.

定理 10 若 $p > 0, q > 1, 0 < T < T_0, U > 0$ 时, 则

(i) 当 $U(q-1) > T_+ p x_1^{-\left(\frac{p}{q-1}\right)}$ 时, 系统 (1) 有极限环;

(ii) 当 $U(q-1) = T_+ p x_1^{-\left(\frac{p}{q-1}\right)}$, p 为自然数, 且 A_1 为不稳定细焦点时, 系统 (1) 有极限环;

(iii) 当 $T \geq U$ 时, 系统 (1) 无极限环.

证 (i) 由定理 4 定理 5 可导出;

(ii) 根据定理 5 推论 3 即可得;

(iii) 由轨线穿过直线 $y = 1 - T_x$ 和水平等倾线的方向得结论 (iii) 成立.

- 1 陈兰荪, 陈健. 非线性生物动力系统. 北京: 科学出版社, 1993, 6~16.
- 2 周建莹等. 生化反应中一类非线性方程的定性分析. 应用数学学报, 1982, 5 (3): 234~240.
- 3 李嘉旭等. 一类多分子反应微分方程模型的定性分析. 生物数学学报, 1990, 5 (2): 160~170.
- 4 蔡燧林等. 一类生化反应方程的分支. 高校应用数学学报, 1991, 6 (1): 145~157.
- 5 张伟年. 一类多分子反应微分方程模型的闭轨的存在性. 应用数学与力学, 1993, 14 (6): 559~566.
- 6 朴仲铉, 姚波. 一类多分子反应模型的极限环的研究. 生物数学学报, 1994, 9 (5): 147~154.
- 7 Tang Yanbin. A hopf bifurcation solution for a multi-molecules reaction model. 数学杂志, 1996, 16 (2): 143~150.
- 8 黄文灶, 张纯彦. 一类非线性方程的定性分析. 系统科学与数学, 1996, 16 (2): 172~180.
- 9 何永葱, 陈永跃. 一类多分子反应微分方程模型的相图. 生物数学学报, 1994, 9 (5): 137~143.
- 10 张芷芬等. 微分方程定性理论. 北京: 科学出版社, 1985, 131~132, 152~153.
- 11 Perk L M. On the accumulation of limit cycles, Proc Amer Math Soci, 1987, 99 515~526.

(责任编辑: 邓大玉 黎贞崇)

(上接第 7 页 Continue from page 7)

$$\|f(z) - L_n(z)\|_{\Gamma} = O_r\left[k_r(F; \frac{1}{n})\right] + O_a(\|f\|_{\Gamma} d^n),$$

其中 $L_n(z)$ 即为定理中欲求的函数.

定理证毕.

若又知 $F^{(k)}(\theta) \in \text{lip}^m T (0 < T \leq 1)$, 在 (1) 式中, 取 $r = k + 1$. 由光滑模的性质^[3] 知,

$$k_{k+1}\left(F; \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^k} k(F^{(k)}; \frac{1}{n}) \leq M \frac{1}{n^{k+1}}$$

由此即得

$$\|f - L_n\|_{\Gamma} = O_{d,f,k}\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

参考文献

- 1 Gaier D. Vorlesungen über approximation im komplexen. Birkhauser, 1980.
- 2 Whittaker E T, Watson G. Modern analysis. Cambridge Univ Press, 1947.
- 3 Lorentz G. Approximation of Functions (中译本). 谢庭藩, 施咸亮译. 上海: 上海科技出版社, 1966.

(责任编辑: 蒋汉明 黎贞崇)