DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.04.007
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (4): 264- 266

一类红松林种群数学模型的分支问题
Bifurcations of the Mathematical Model of Population of Korean Pines

李群宏
Li Qunhong

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(Dept. of Math. & Info Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 对一类具有鼠类作用的三维非线性红松林种群的数学模型讨论了鞍结分支，且对 Hopf分支周期解进行了详细的分析与计算.

关键词 红松林种群 鞍结分支 Hopf分支 周期解

Abstract The saddle-node bifurcation for a kind of nonlinear mathematical model of three-dimensions for the population of Korean pines with mouse class function was discussed, and calculation formula and analysis for the periodic solution of Hopf bifurcation were given detailly.

Key words population of Korean pines, saddle-node bifurcation, Hopf bifurcation, periodic solution.

中图法分类号 O 177.99

1 问题提出

文献 [3]提出一类具有鼠类作用的非线性红松林种群的数学模型

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = V + a_1x + x^2 - b_1y \equiv P(x,y,z,V) \\
\dfrac{dy}{dt} = a_2x - y \equiv Q(x,y,z,V) \\
\dfrac{dz}{dt} = b_2y - z \equiv R(x,y,z,V)
\end{cases}
\qquad (1)
$$

式中 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ 分别表示松籽,鼠类和幼苗的增长数量, V, a_1, a_2, b_1, b_2 均为正常数，具有生态意义. 本文在文献 [3]的基础上对系统 (1)作了进一步研究，得到了一些新的结果.

2 鞍结分支

首先叙述几个简单的结论:

引理 1[3] 当 $a_2b_1 - a_1 > 2\sqrt{V}$ 时，系统 (1)在 R_+^3 内存在两个平衡点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 其中

$$x_i = \frac{1}{2}\left[a_2b_1 - a_1 \pm \sqrt{(a_2b_1 - a_1)^2 - 4V}\right]$$

$$y_i = a_2x_i$$

$$z_i = a_2b_2x_i \qquad (i = 1,\ 2)$$

(设 $x_1 > x_2$)

当 $a_2b_1 - a_1 < 2\sqrt{V}$ 时，在 R_+^3 内无系统 (1)的平衡点.

引理 2[3] 系统 (1)的平衡点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 是双曲型的. 当 $a_2b_1 - 1 < \sqrt{(a_2b_1 - a_1)^2 - 4V}$ 时，平衡点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是渐进稳定的; 当 $a_2b_1 - 1 > \sqrt{(a_2b_1 - a_1)^2 - 4V}$ 时，平衡点 M_2 是双曲型的; 当 $a_2b_1 - 1 = \sqrt{(a_2b_1 - a_1)^2 - 4V}$ 时, M_2 是不稳定的.

引理 3 当 $a_2b_1 - a_1 = 2\sqrt{V}$ 时，系统 (1)在 R_+^3 内存在唯一的平衡点 $M(\sqrt{V}, a_2\sqrt{V}, a_2b_2\sqrt{V})$.

我们选 V 作为分支参数，讨论了系统 (1)的鞍结分支问题，得到如下结果:

定理 1 当 $a_2b_1 - a_1 = 2\sqrt{V}$ 且 $a_1 + 2\sqrt{V} - 1 \neq 0$, 则系统 (1) 在平衡点 M 处出现鞍结分支.

证明 在平衡点 M 处，系统 (1)的特征方程为

$$
\begin{vmatrix}
\lambda - a_1 - 2\sqrt{V} & b_1 & 0 \\
-a_2 & \lambda + 1 & 0 \\
0 & -b_2 & \lambda + 1
\end{vmatrix}
= \lambda(\lambda + 1)[\lambda -
$$

1996-09-23收稿， 1997-08-25修回。

$(a_1+2\sqrt{V}-1)]=0$

其特征值为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=a_1+2\sqrt{V}-1$$

由定理假设知，$\lambda_3\neq 0$. 系统(1)对应于 $\lambda_1=0$ 的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_1+2\sqrt{V} & -b_1 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 \\ 0 & b_2 & -1 \end{pmatrix}$$

其右特征向量为

$$V=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_2b_2} \\ \frac{1}{b_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

而左特征向量为

$$W=\left(-\frac{1}{b_1},\quad 1,\quad 0\right)$$

设 F_V 表示系统(1)的向量场 (P,Q,R)，则

$$W\left(\frac{\partial F_V}{\partial V}\right)=-\frac{1}{b_1}\neq 0$$

因为

$$DF_V=\begin{pmatrix} a_1+2x & -b_1 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 \\ 0 & b_2 & -1 \end{pmatrix}$$

于是有

$$D(DF_VV)V=\begin{pmatrix} \frac{2}{a_2^2b_2^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$W\cdot D(DF_VV)V=-\frac{2}{a_2^2b_1b_2^2}\neq 0$$

故由定理[2]得证.

3 Hopf分支周期解

下面仍以 V 作为分支参数，讨论 Hopf分支周期解的近似表达式. 在 $a_2b_1-a_1>2\sqrt{V}$ 的情形下，易知，在平衡点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 处的特征矩阵为

$$A(V)=\begin{pmatrix} a_1+2x_2 & -b_1 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 \\ 0 & b_2 & -1 \end{pmatrix}$$

其特征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[a_1+2x_2-1\pm\sqrt{(a_1+2x_2-1)^2-4\sqrt{(a_2b_1-a_1)^2-4V}}\right]$$

$$\lambda_3=-1$$

由 $a_1+2x_2-1=a_2b_1-1-\sqrt{(a_2b_1-a_1)^2-4V}=0$，即

$$V=\frac{1}{4}(-2a_1a_2b_1+a_1^2+2a_2b_1-1)\triangleq V_0$$

可知，在 $V=V_0$ 附近，λ_1,λ_2 是一对共轭复数

$$\lambda_{1,2}=T(V)\pm i\,k(V)$$

其中，$T(V)=\frac{1}{2}(a_1+2x_2-1)$，$k(V)=$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-(a_1+2x_2-1)^2+4\sqrt{(a_2b_1-a_1)^2-4V}}$$

通过简单计算得到

$$T(V_0)=0,$$

$$T'(V_0)=\frac{1}{a_2b_1-1},$$

$$k(V_0)=\sqrt{a_2b_1-1}$$

于是在 $V=V_0$ 时系统(1)发生 Hopf分支. 记 $k_0=k(V_0)$.

$A(V_0)$ 对应于特征值 $\lambda_1(V_0)=ik_0$，$\lambda_3=-1$ 的特征向量分别为

$$V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_2}{ik_0+1} \\ \frac{a_2b_2}{(ik_0+1)^2} \end{pmatrix},\quad V_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令

$$P=(\mathrm{Re}\,V_1,\ -\mathrm{Im}\,V_1,\ V_3)=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{k_0^2+1} & \frac{a_2k_0}{k_0^2+1} & 0 \\ \frac{a_2b_2(1-k_0^2)}{(k_0^2+1)^2} & \frac{2a_2b_2k_0}{(k_0^2+1)^2} & 1 \end{pmatrix}$$

从而有

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_0} & \frac{k_0^2+1}{a_2k_0} & 0 \\ \frac{a_2b_2}{k_0^2+1} & -\frac{2b_2}{k_0^2+1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2(V_0)=\begin{pmatrix} x_2(V_0) \\ y_2(V_0) \\ z_2(V_0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-a_1) \\ \frac{1}{2}a_2(1-a_1) \\ \frac{1}{2}a_2b_2(1-a_1) \end{pmatrix}$$

令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=M_2(V_0)+P\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\bar{x}}{dt} = \triangle + \bar{x}^2 - k_0\bar{y} \\
\dfrac{d\bar{y}}{dt} = -\dfrac{1}{k_0}\triangle + k_0\bar{x} - \dfrac{1}{k_0}\bar{x}^2 \\
\dfrac{d\bar{z}}{dt} = \dfrac{a_2b_2}{k_0^2+1}\triangle + \dfrac{a_2b_2}{k_0^2+1}\bar{x}^2 - \bar{z}
\end{cases} \tag{2}
$$

式中 $\triangle = V + a_1x_2 + x_2^2 - b_1y_2$.

根据文献 [1]的计算方法, 得

$$g_{11} = g_{02} = g_{20} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2k_0},$$

$$G_{21} = 0,$$

$$k_{11} = \frac{a_2b_2}{2(k_0^2+1)}$$

$$k_{20} = \frac{a_2b_2}{2(k_0^2+1)(4k_0^2+1)} - i\frac{a_2b_2k_0}{(k_0^2+1)(4k_0^2+1)},$$

$$G_{110} = G_{101} = g_{21} = 0$$

于是, 有

$$c_1(V_0) = \frac{1}{4k_0^2} - i\frac{1}{6k_0}\left(1 + \frac{5}{2k_0^2}\right)$$

$$k'(V_0) = -\frac{1}{k_0^3}$$

$$V = V_0 + V_2X^2 + V_4X^4 + \cdots$$

式中 $V_2 = -\dfrac{\mathrm{Re}\,c_1(V_0)}{T'(V_0)} = -\dfrac{1}{4}$,决定 Hopf分支的方向

$$r_2 = -\frac{1}{k_0}[\mathrm{Im}\,c_1(V_0) + V_2k'(V_0)] = \frac{k_0^2+1}{6k_0^4}$$

$$U_2 = 2\mathrm{Re}\,c_1(V_0) = \frac{1}{2k_0^2}$$

因此, 周期 $T = \dfrac{2c}{k_0}\left(1 + \dfrac{k_0^2+1}{6k_0^4}X^2 + o(X^4)\right)$,

Floquet指数 $U = \dfrac{1}{2k_0^2}X^2 + o(X^4)$, 故分支出的周期解是不稳定的.

又由 $u = Xe^{2cit/T} + iX^2\dfrac{g_{11}}{6k_0}[e^{-4cit/T} - 3e^{4cit/T} + 6] + o(X^3)$ 得到

$$\mathrm{Re}\,u = X\cos\frac{2ct}{T} + X^2\frac{1}{6k_0^2}\left[3 - \cos\frac{4ct}{T} + 2k_0\sin\frac{4ct}{T}\right] + o(X^3),$$

$$\mathrm{Im}\,u = X\sin\frac{2ct}{T} + X^2\frac{1}{6k_0^2}\left[k_0\left(3 - \cos\frac{4ct}{T}\right) - 2\sin\frac{4ct}{T}\right] + o(X^3).$$

从而得到下面的定理

定理 2 设 $a_2b_1 - a_1 > 2\sqrt{V}$, 则当 $V < V_0 = \frac{1}{4}(-2a_1a_2b_1 + a_1^2 + 2a_2b_1 - 1)$ 且 $V_0 - V$ 充分小时, 系统 (1) 在 M_2 附近存在不稳定的周期解, 其周期为

$$T = \frac{2c}{k_0}\left(1 + \frac{k_0^2+1}{6k_0^4}X^2 + o(X^4)\right)$$

周期解的表达式为

$$x = \frac{1}{2}(1 - a_1) + X\cos\frac{2ct}{T} + X^2\frac{1}{6k_0^2}\left(3 - \cos\frac{4ct}{T} + 2k_0\sin\frac{4ct}{T}\right) + o(X^3)$$

$$y = \frac{1}{2}a_2(1 - a_1) + X\frac{a_2}{k_0^2+1}\left(\cos\frac{2ct}{T} + k_0\sin\frac{2ct}{T}\right) + X^2\frac{a_2}{6k_0^2}\left(3 - \cos\frac{4ct}{T}\right) + o(X^3)$$

$$z = \frac{1}{2}a_2b_2(1 - a_1) + X\frac{a_2b_2}{(k_0^2+1)^2}\left[(1 - k_0^2)\cos\frac{2ct}{T} + 2k_0\sin\frac{2ct}{T}\right] + X^2\frac{a_2b_2}{6k_0^2(4k_0^2+1)}\left[3(4k_0^2+1) - \cos\frac{4ct}{T} - 2k_0\sin\frac{4ct}{T}\right] + o(X^3)$$

这里, $k_0 = \sqrt{a_2b_1 - 1}$, $X^2 = \dfrac{V - V_0}{V_2} + o(V - V_0)^2$.

注: 定理 2包含了文献 [3]中定理 1的结果.

参考文献

1 Hassard BD, Kazarinoff ND, Wan YH. Theory and Application of Hopf Bifurcation. Cambridge, 1981.

2 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Spinger-verlag, 1983.

3 李秀琴, 朱宝彦, 段丽芬. 具有鼠类作用的红松林种群的数学模型. 沈阳建筑工程学院学报, 1996, 12 (1): 101~105.

4 Shen Jiaqi. Local Bifurcations of Rossler's Equation. Ann of Diff Eqs, 1992, 8 (1): 82~87.

(责任编辑: 蒋汉明)