

# Ramsey数 $R(4, 20)$ 和 $R(5, 16)$ , $R(5, 17)$ , $R(5, 18)$ , $R(5, 20)$ , $R(5, 21)$ 的新下界\*

## New Lower Bounds of Classical Ramsey Numbers $R(4, 20)$ and $R(5, 16)$ , $R(5, 17)$ , $R(5, 18)$ , $R(5, 20)$ , $R(5, 21)$

罗海鹏

Luo Haipeng

苏文龙

Su Wenlong

(广西科学院 南宁市江南路西一里 20号 530031)

(Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili,

Jiangnanlu, Nanning, Guangxi, 530031)

(广西梧州一中 梧州 543002)

(Wuzhou First Middle School

of Guangxi, Wuzhou, 543002)

吴康

Wu Kang

(华南师范大学 广州 510631)

(South China Normal University, Guangzhou, Guangdong, 510631)

摘要 构造了 6个新的素数阶循环图,从而得到 6个 Ramsey 数的新下界:  $R(4, 20) \geq 198$ ,  $R(5, 16) \geq 224$ ,  
 $R(5, 17) \geq 252$ ,  $R(5, 18) \geq 272$ ,  $R(5, 20) \geq 308$ ,  $R(5, 21) \geq 354$ .

关键词 Ramsey 数 下界 素数阶循环图

**Abstract** Six new prime order cyclic graphs were structured, so new lower bounds of six Ramsey numbers were obtained as follows:  $R(4, 20) \geq 198$ ,  $R(5, 16) \geq 224$ ,  $R(5, 17) \geq 252$ ,  $R(5, 18) \geq 272$ ,  $R(5, 20) \geq 308$ ,  $R(5, 21) \geq 354$ .

**Key words** Ramsey number, lower bound, prime order cyclic graph

中图法分类号 O 157.5

确定 Ramsey 数是组合数学和图论中著名的难题. 根据 Ramsey 数研究权威 S. P. Radziszowski 的综述<sup>[1]</sup>的 1997年 7月 16日的更新版本, 1)当  $q = 4, 5, \dots, 15$ 时,  $R(4, q)$  的下界分别大于等于 18, 25, 35, 49, 53, 69, 80, 96, 128, 131, 136, 145; 2)当  $q = 5, 6, \dots, 15$ 时,  $R(5, q)$  的下界分别大于等于 43, 58, 80, 95, 114, 118, 140, 150, 158, 182, 198. 其他的  $R(4, q)$  和  $R(5, q)$  的下界均是当前研究的空白.

寻找 Ramsey 数新的下界越来越困难, 主要的原因是在这个寻找过程中, 计算量的增大使目前的计算机难以承受. 有鉴于此, 我们把数论、近世代数、组合学、图论等领域里的一些研究方法结合起来<sup>[2]</sup>, 用

于 Ramsey 数下界的寻找.

我们考查素数阶循环图, 利用平移和旋转等性质改进了产生参数的方法, 提高了运算效率, 得到了一系列 Ramsey 数新的下界<sup>[2-8]</sup>. 在我们已发表和待发表的文章中, 一举改写了文献 [1] 的 1996年 3月 25日版本的  $R(4, 12)$ ,  $R(4, 13)$ ,  $R(4, 14)$ ,  $R(4, 15)$ ,  $R(4, 16)$ ,  $R(4, 17)$  的下界记录; 另外, 还给出了  $R(5, 11)$ ,  $R(5, 12)$ ,  $R(5, 13)$ ,  $R(5, 14)$ ,  $R(5, 15)$  的新的下界. 在文献 [1] 的 1997年 7月 16日版本中, 已列入了我们给出的 6个下界为目前最好下界, 另外还有 3个最好下界是用我们给出的下界值递推出来的. 在本文中, 我们进一步构造了 6个新的素数阶循环图, 从而给出了 6个 Ramsey 数的新的下界.

对于给定的素数  $p$ , 记  $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ , 选定参数集合  $S \subseteq \{1, 2, \dots, (p-1)/2\}$ . 设图  $G$  的顶点集  $V_G = Z_p$ , 两个顶点  $x$  和  $y$  相邻当且仅当

$\min\{|x-y|, p-|x-y|\} \in S$ . 我们称图  $G$  为关于参数集合  $S$  的  $p$  阶循环图并记为  $G_p(S)$ .

据此我们构造了 6 个素数阶循环图:

1) 给定素数  $p = 197$  与参数集合

$S = \{1, 4, 6, 7, 10, 19, 22, 24, 25, 33, 34, 36, 37, 39, 42, 47, 53, 55, 60, 62, 64, 65, 76, 81, 83, 85, 92, 93\}$ .

2) 给定素数  $p = 223$  与参数集合

$S = \{1, 3, 5, 9, 16, 20, 23, 27, 28, 29, 31, 37, 39, 40, 43, 45, 47, 49, 53, 59, 60, 62, 64, 71, 81, 86, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 103, 105, 106, 107, 110, 111\}$ .

3) 给定素数  $p = 251$  与参数集合

$S = \{1, 2, 6, 20, 25, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 43, 44, 47, 48, 52, 53, 56, 59, 61, 64, 68, 75, 83, 90, 92, 93, 97, 98, 102, 103, 105, 107, 110, 113, 116, 119, 120, 121, 124\}$ .

4) 给定素数  $p = 271$  与参数集合

$S = \{1, 3, 6, 8, 10, 13, 19, 23, 24, 27, 29, 30, 31, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 43, 55, 58, 60, 77, 79, 80, 81, 84, 85, 89, 94, 99, 100, 106, 109, 112, 119, 127, 130, 132\}$ .

5) 给定素数  $p = 307$  与参数集合

$S = \{1, 5, 7, 14, 15, 17, 18, 20, 25, 27, 30, 33, 37, 42, 46, 52, 53, 55, 64, 69, 74, 76, 77, 78, 81, 85, 90, 93, 96, 97, 98, 100, 104, 114, 118, 119, 126, 128, 131, 139, 140, 142, 143, 149, 152\}$ .

6) 给定素数  $p = 353$  与参数集合

$S = \{1, 3, 4, 7, 13, 16, 22, 25, 27, 30, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 46, 47, 48, 53, 55, 58, 62, 64, 66, 67, 79, 86, 88, 97, 98, 103, 107, 112, 117, 121, 122, 127, 130, 131, 135, 136, 140, 142, 145, 146, 148, 151, 154, 156, 162, 166, 168, 171,$

174}.

我们在计算机上验证了: 如前定义的素数阶循环图  $G_{197}(S)$  中即不含 4 点团  $K_4$ , 也不含 20 独立点集  $\bar{K}_{20}$ ; 循环图  $G_{223}(S)$  中即不含 5 点团  $K_5$ , 也不含 16 独立点集  $\bar{K}_{16}$ ; 循环图  $G_{251}(S)$  中即不含 5 点团  $K_5$ , 也不含 18 独立点集  $\bar{K}_{18}$ ; 循环图  $G_{307}(S)$  中即不含 5 点团  $K_5$ , 也不含 20 独立点集  $\bar{K}_{20}$ ; 循环图  $G_{353}(S)$  中即不含 5 点团  $K_5$ , 也不含 21 独立点集  $\bar{K}_{21}$ . 由于这些结论并据 Ramsey 定理, 我们就证明了

定理 1  $R(4, 20) \geq 198, R(5, 16) \geq 224, R(5, 17) \geq 252, R(5, 18) \geq 272, R(5, 20) \geq 308, R(5, 21) \geq 354$ .

上述 6 个结果填补了文献 [1] 中的有关 Ramsey 数下界的空白.

### 参考文献

- 1 Radziszowski SP. Small Ramsey Numbers. The Electronic Journal of Combinatorics, 1994, 1 (1): 1~ 29.
- 2 Su Wenlong. The estimation of lower bounds about some ramsey numbers  $R_n(3)$  and  $R_n(4)$ . Guangxi Sciences, 1996, 3 (3): 4~ 7.
- 3 张正铀, 苏文龙, 罗海鹏等. Ramsey 数  $R(3, 3, 3, 3, 2)$  的下界. 计算机应用研究, 1997, 3 30~ 31.
- 4 罗海鹏, 苏文龙, 张正铀等. 一个 Ramsey 数的新的下界. 广西大学学报, 1997, 2 95~ 97.
- 5 罗海鹏, 苏文龙, 张正铀等. Ramsey 数  $R_7(4)$  的新下界. 桂林电子工业学院学报, 1997, 2 49~ 52.
- 6 张正铀, 苏文龙, 罗海鹏. Ramsey 数  $R_9(4)$  的新下界. 广西民族学院学报, 1997, 1 1~ 4.
- 7 Su Wenlong, Wu Kang, Luo Haipeng. The normal subgroup of cyclic group and the estimation of lower bounds about Ramsey numbers. 97' Summer School and International Conference on Combinatorics, 1997. 5.
- 8 张正铀, 苏文龙, 罗海鹏. 经典 Ramsey 数  $R(5, 11)$  的下界. 广西科学, 1997, 4 (2): 84, 92.

(责任编辑: 蒋汉明)