DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.03.007

广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (3): 183～185

若干 Ramsey数 Rn (5) 的新下界*
Some New Lower Bounds of Ramsey Numbers Rn (5)

苏文龙
Su Wenlong
(广西梧州一中 梧州市 543002)
(Wuzhou First Middle School of Guangxi, Wuzhou, 543002)

罗海鹏
Luo Haipeng
(广西科学院 南宁市江南路西一里 20号 530031)
(Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili, Jiangnanlu, Nanning, Guangxi, 530031)

吴 康
Wu Kang
(华南师范大学 广州 510631)
(South China Normal University, Guangzhou, Guangdong, 510631)

摘要 用群论和数论研究素数阶循环图的基本性质,并进一步探讨寻求 Ramsey数 $Rn(5)$ 的下界的一般方法,得到了 Ramsey数 $Rn(5)$ 的 20个新的下界.
关键词 Ramsey数 下界 循环图

Abstract The basic characters of prime order cyclic graph was studied by using Group-theory and Number-theory, and further studies were also made to the method for finding lower bounds of Ramsey numbers $Rn(5)$. Twenty new lower bounds of Ramsey numbers $Rn(5)$ were obtained.

Key words Ramsey number, lower bound, cyclic graph
中图法分类号 O157.5

1930年,英国科学家 F. P. Ramsey发现了一个定理[1]. 该定理揭示了“不可能有完全的无序”这深刻的自然规律而引起人们浓厚的兴趣,发展成为图论、组合数学和离散数学的核心内容—— Ramsey理论,在现代数学中产生了深远的影响,并在计算机科学、通讯工程学和决策科学等许多学科的实际问题中有着广泛的应用.

确定 Ramsey数是 Ramsey理论的核心问题,也是世界著名的数学难题[2]. 即使是改进一个具体的 Ramsey数的上界或下界也是难度非常大的工作. 例如,很长一段时间以来,仅知道 $28 \leqslant R(3,8) \leqslant 29$. 1990年, B. D. McKay和张克民[3]采用穷举法,在高速计算机上连续运算一个月证明了 $R(3,8)=28$,得到迄今已知的第 9个不平凡的 Ramsey数,这是一个很大的成就. 但是当 Ramsey数增大时,采用这种方法的运算量呈指数型增长,所需要的运算时间是人们难以接受的. 由于 Ramsey数的确定如此困难,而且至今在理论和方法上尚未见到取得突破的迹象,因此近年来国内外学者主要用各种方法借助计算机对一些具体的 Ramsey数给出估计[4]. 阎淑达[5]、宋恩民[6]、谢继国[7]等人研究了阶数较小的循环图,得到了一些 Ramsey数的新的下界,这些成果都是当今高度发达的计算机科学技术与高超的计算机编程技巧的结晶.但是鉴于这些方法在产生参数时存在一定随机性,因此我们另辟战场,从理论上对 Ramsey数进行了深入的探讨.用群论和数论研究素数阶循环图的性质,阐明了寻求多色 Ramsey数 $Rn(5)$的下界的较一般的方法,一举得到如下 20个 Ramsey数 $Rn(5)$的新下界:

定理 1 约定,多色 Ramsey数 $R(k_1, k_2, \cdots, k_n; 2)$ 当 $k=k_1=k_2=\cdots=k_n$ 时简记为 $Rn(k)$,我们有

(1) $R_4(5) \geqslant 770$	(11) $R_{14}(5) \geqslant 51242$
(2) $R_5(5) \geqslant 1532$	(12) $R_{15}(5) \geqslant 62312$
(3) $R_6(5) \geqslant 4154$	(13) $R_{16}(5) \geqslant 66338$
(4) $R_7(5) \geqslant 5574$	(14) $R_{17}(5) \geqslant 71538$
(5) $R_8(5) \geqslant 10434$	(15) $R_{18}(5) \geqslant 86294$
(6) $R_9(5) \geqslant 16382$	(16) $R_{19}(5) \geqslant 111950$
(7) $R_{10}(5) \geqslant 18342$	(17) $R_{20}(5) \geqslant 127242$
(8) $R_{11}(5) \geqslant 20550$	(18) $R_{21}(5) \geqslant 140870$
(9) $R_{12}(5) \geqslant 29138$	(19) $R_{22}(5) \geqslant 152858$
(10) $R_{13}(5) \geqslant 30578$	(20) $R_{23}(5) \geqslant 178988$

1997-04-30收稿。
* 广西科学基金资助项目。

上述下界均未见于国内外其他文献报道,并且远远优于根据一般的下界公式计算出来的结果.

1 素数阶循环图与 Ramsey数 $Rn(5)$ 的下界

给定整数 $n \geqslant 2$,素数 $p = 2mn + 1$,记 $Z_p = \{-mn, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, mn\}$ 为模 p 的绝对最小完全剩余系.约定,以下所有小写英文字母都表示模 p 整数,并且任何若干个整数的加、减、乘、乘方运算的结果(为了简便,仍用普通等号“=”写出)都应取模 p 同余归结到 Z_p,除非另外声明.设 g 是 p 的原根,记

$\bar{Z}_p = \{x \mid x = g^j, 0 \leqslant j < 2mn\}$.

$T_i = \{x \mid x = g^{nj+i}, 0 \leqslant j < 2m\}, 0 \leqslant i < n$.

$T_iT_j = \{x \mid x = ab, a \in T_i, b \in T_j\}$.

熟知 Z_p 是有限域,$\bar{Z}_p$ 是在模 p 同余的乘法运算下的 $2mn$ 阶交换群,T_0 是生成元为 g^n 的 $2m$ 阶循环群,它是 Z_p 的正规子群,T_i 是 T_0 的陪集,$Z_p/T_0 = \{T_0, \cdots, T_{n-1}\}$ 是 $\bar{Z}_p$ 的商群,并且有

引理 1 $T_iT_j = T_{i+j}$,其中 $T_{i+j} = T_r$,$r = i + j \pmod n$ 且 $0 \leqslant r < n$.(约定,以下关于 T_i 的下标均仿此:取模 n 同余且归结到模 n 的最小非负剩余系 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$.

定义 1 设 G是 p 个顶点的完全图,顶集 $V_G = Z_p$,以命名为 $0, 1, \cdots, n-1$ 的 n 种颜色把各边着色:当且仅当 $x - y \in T_i$ 时两个顶点 x, y 称为 T_i 相邻的(即顶点 x, y 的联边是着色 i 的).像这样命名了各顶点并且规定了各边着色方法的完全图称为 p 阶循环图.

定义 2 在 p 阶循环图 G中,$k \geqslant 2$ 个不同的顶点 $x, y, \cdots, z$ 如果其中任意两个顶点都是 T_i 相邻的,就称它们作成一个 k 阶 T_i 团(即各边均着色 i 的 k 阶完全子图),记为 $(x, y, \cdots, z)$.

引理 2 设 $a \in T_j$,$b \in Z_p$,则 $f(x) = ax + b$ $(x \in Z_p)$ 作成图 G的同构变换,它把 k 阶 T_i 团变换成 k 阶 T_{i+j} 团.

证明 由 $a \in T_j$ 知 $a \neq 0$.对于任意 $x, y \in Z_p$ 有 $x = y \Leftrightarrow ax = ay \Leftrightarrow f(x) = f(y)$,即 f 作成顶集 V_G 的 1-1变换.据引理 1有 $x - y \in T_i \Leftrightarrow f(x) - f(y) = a(x - y) \in T_{i+j}$,即图 G中 T_i 相邻的两个顶点变换成 T_{i+j} 相邻的其他两个顶点,因此图 G中 T_i 团变换成 T_{i+j} 团.证毕.

注意到 T_0 是生成元为 g^n 的 $2m$ 阶循环群,因此 $g^{nm} \neq 1$ 但 $g^{2nm} = 1$,有 $g^{nm} = -1 \in T_0$.由引理 1得 $x \in T_0 \Leftrightarrow -x = (-1) \cdot x \in T_0$,由此易知

引理 3 记 $\tilde{T}_0 = \{x \mid x \in T_0 且 x > 0\}$,则在取模 p 同余归结到 Z_p 的乘法运算再取绝对值的复合运算下,$\tilde{T}_0$ 作成以 g^n 为生成元的 m 阶循环群:

$$\tilde{T}_0 = \{|x| \mid x \equiv g^{ni} \pmod p, x \in Z_p, 0 \leqslant i < m\}.$$

并且有 $x \in T_0 \Leftrightarrow |x| \in \tilde{T}_0$.

定义 3 记 T_0 的子集

$$\theta = \{x \mid x \in T_0 且 x - 1 \in T_0\}.$$

设 $\theta \neq \emptyset$ 且 $a \in \theta$.令

$$\theta(a) = \{x \mid x \in \theta 且 |x - a| \in \tilde{T}_0\}.$$

我们用 $[\theta(a)]$ 表示集合 $\theta(a)$ 的特征数:如果 $\theta(a) = \emptyset$,就记 $[\theta(a)] = 0$;如果 $\theta(a)$ 只含一个元素,或者对于任意 $b, c \in \theta(a)$ 都有 $|c - b| \notin \tilde{T}_0$,就记 $[\theta(a)] = 1$.其他情形记为 $[\theta(a)] > 1$.

引理 4 设 $\theta \neq \emptyset$.如果对于任意 $a \in \theta$,恒有 $[\theta(a)] \leqslant 1$,那么 $Rn(5) \geqslant p + 1$.

证明 假设在 p 阶循环图 G中存在某个 5阶 T_i 团 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.据定义 2知 $x_2 - x_1 \in T_i$,据引理 1知 $(x_2 - x_1)^{-1} \in T_{-i}$,据引理 2知变换

$f(x) = (x_2 - x_1)^{-1} \cdot (x - x_1)$

把这 5阶 T_i 团变换成 5阶 T_0 团 $(0, 1, a, b, c)$,其中 $a = f(x_3)$,$b = f(x_4)$,$c = f(x_5)$.考察这 5阶 T_0 团,据定义 2知 $c - b \in T_0$ 并且

(1) $a, a - 1; b, b - 1; c, c - 1 \in T_0 \Rightarrow a, b, c \in \theta$.

(2) $b - a, c - a \in T_0$.

据引理 3知 $|b - a|, |c - a|, |c - b| \in \tilde{T}_0$,据定义 3知 $b, c \in \theta(a)$ 并且有 $[\theta(a)] > 1$.这与引理 4的条件是不相容的.因此我们根据定义 1构造了一个 p 阶循环图 G并且证明了:在引理 4的条件下,这 p 阶循环图 G中任何 5阶 T_i 团 $(0 \leqslant i < n)$ 都不存在.据 Ramsey 定理知 $Rn(5) \leqslant p$ 是不可能的,只能有 $Rn(5) \geqslant p + 1$.证毕.

2 定理 1的证明

引理 3揭示了正规子群 T_0 的对称性结构,即由 $\tilde{T}_0$ 可确定 T_0:$x \in T_0 \Leftrightarrow x$ 与 $-x \in T_0$;引理 4则给出了寻求 $Rn(5)$ 下界的一般方法.

(1) 给定 $n = 4$,素数 $p = 769$,则 $g^n = 4$ 是循环群 $\tilde{T}_0$ 的最小生成元,据引理 3算得

$\tilde{T}_0 = \{1, 3, 4, 9, 10, 12, 16, 19, 25, 27, 30, 34, 36, 40, 41, 43, 48, 57, 62, 64, 75, 76, 77, 81, 85, 90, 94, 98, 100, 102, 108, 113, 120, 123, 129, 131, 136, 143, 144, 149, 155, 160, 164, 171, 172, 173, 178, 182, 186, 190,$

192, 193, 197, 199, 203, 211, 223, 225, 228, 231, 235, 242, 243, 245, 248, 250, 251, 253, 255, 256, 270, 277, 282, 289, 294, 300, 304, 306, 308, 311, 314, 317, 322, 324, 337, 338, 339, 340, 359, 360, 361, 362, 369, 376, 377, 382}.

据定义 3有

θ = {4, 10, 41, 76, 77, 144, 172, 173, 193, 243, 251, 256, 338, 339, 340, 360, 361, 362, 377, − 376, − 361, − 360, − 359, − 339, − 338, − 337, − 255, − 250, − 242, − 192, − 172, − 171, − 143, − 76, − 75, − 40, − 9, − 3}.

不难验证 ,$\theta(4)$ = H. 据定义 3知 $[\theta(4)] = 0$. $\theta(10)$ = {− 359, − 172, − 75, − 9}并且对于任意 $b, c \in \theta(10)$,都有 $|b - c| \notin T_0$,据定义 3知 $[\theta(10)] = 1$.仿此可证 ,对于任意 $a \in \theta$都有 $[\theta(a)] \leqslant 1$.据引理 4即得 $Rn(5) \geqslant 770$.这就证明了定理 1的第 (1)个结论.

仿上述 ,考察以下各组数据

(2) $n = 5$,素数 $p = 1531$, T_0 的生成元 $g^n = 11$.

(3) $n = 6$,素数 $p = 4153$, T_0 的生成元 $g^n = 61$.

(4) $n = 7$,素数 $p = 5573$, T_0 的生成元 $g^n = 11$.

(5) $n = 8$,素数 $p = 10433$, T_0 的生成元 $g^n = 2$.

(6) $n = 9$,素数 $p = 16381$, T_0 的生成元 $g^n = 153$.

(7) $n = 10$,素数 $p = 18341$, T_0 的生成元 $g^n = 4$.

(8) $n = 11$,素数 $p = 20549$, T_0 的生成元 $g^n = 18$.

(9) $n = 12$,素数 $p = 29137$, T_0 的生成元 $g^n = 8$.

(10) $n = 13$,素数 $p = 30577$, T_0 的生成元 $g^n = 92$.

(11) $n = 14$,素数 $p = 51241$, T_0 的生成元 $g^n = 7$.

(12) $n = 15$,素数 $p = 62311$, T_0 的生成元 $g^n = 3$.

(13) $n = 16$,素数 $p = 66337$, T_0 的生成元 $g^n = 4$.

(14) $n = 17$,素数 $p = 71537$, T_0 的生成元 $g^n = 20$.

(15) $n = 18$,素数 $p = 86293$, T_0 的生成元 $g^n = 31$.

(16) $n = 19$,素数 $p = 111949$, T_0 的生成元 $g^n = 119$.

(17) $n = 20$,素数 $p = 127241$, T_0 的生成元 $g^n = 2$.

(18) $n = 21$,素数 $p = 140869$, T_0 的生成元 $g^n = 8$.

(19) $n = 22$,素数 $p = 152857$, T_0 的生成元 $g^n = 203$.

(20) $n = 23$,素数 $p = 178987$, T_0 的生成元 $g^n = 19$.

利用计算机作辅助运算 ,可以验证相应的集合 θ 都满足引理 4的条件 ,因此据引理 4就证明了定理 1中的其余的各结论 .

致谢

广西大学苏德富教授帮助查找相关资料,在此对他表示衷心的感谢!

参考文献

1 Ramsey F P. On a problem of formal logic. Proc London Math Soc and Ser, 1930, 30: 264～ 286.

2 李 乔 .组合数学基础 .北京: 高等教育出版社 , 1993, 11, 225～ 258.

3 McKay B D, Zhang K M. The value of the Ramsey number $r(3, 8)$. J Graph Theory, 1992, 16 (1): 99～ 105.

4 Stanislaw P R. Small Ramsey numbers. RIT－ TR, 1993, 1: 2～ 3.

5 阎淑达 , 王清贤 , 王攻本 . 确定 Ramsey数下界的回溯算法 . 第六届全国计算机算法会议 , 青岛 . 1989.

6 宋恩民 , 董向锋 , 许如初 . 求 Ramsey数下界的循环巧妙图搜索算法研究 . 应用数学 , 1995, 8 (4): 424～ 428.

7 谢继国 ,张忠辅 . 经典 Ramsey数 $R(5, 9)$和 $R(5, 10)$ 的下界 . 科学通报 , 1996, 41 (20): 1918～ 1919.

(责任编辑: 蒋汉明)