DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.03.003
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (3): 174- 178

用因式分解法求解高维空间各向同性谐振子

Solution of the Hyperradial Schrödinger Equation of the Isotropic ν-Dimensional Harmonic Oscillator by Factorization Method

张文英
Zhang Wenying

(广西大学物理系　南宁市西乡塘东路 10号　530004)
(Physics Department of Guangxi University, 10 East Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要　用因式分解法找到高维空间各向同性谐振子的超径向阶梯算符,计算能量本征值和超径向本征函数,并给出归一化系数的一般公式。

关键词　ν维各向同性谐振子　超径向薛定谔方程　超径向阶梯算符

Abstract　Hyperradial ladder operators of the isotropic ν-dimensional harmonic oscillator are found by factoring the hyperradial Schrödinger equation of the system. Eigenvalues of the energy and hyperradial eigenfunctions are calculated with the ladder operators. The general formulas of the normalizing factors are given as well.

Key words　isotropic ν-dimensional harmonic oscillator, hyperradial Schrödinger equation, hyperradial ladder operator

中图法分类号　O413.1

在分子、原子和原子核物理中的一些相互作用,可以用耦合振子来描述[1]。文献[2～4]讨论了四个和任意个耦合振子的求解,哈密顿量的形式为:

$$H=\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{p_i^2}{2m}+\frac{K_0}{2}q_i^2\right)+\frac{K}{4}\sum_{i,j=1}^{d}(q_i-q_j)^2 \qquad (0)$$

这样的耦合振子系统,通过适当的变换,可化为独立谐振子系统。而且这 d 个独立谐振子中,只有一个简正频率为 $\omega_0=\sqrt{K_0/m}$,其余 $(d-1)$ 个简正频率是相同的 $\omega=\sqrt{(K_0+dK)/m}$ [3]。这些 $(d-1)$ 个简正模可看作多维各向同性谐振子。

本文把多维各向同性谐振子作为一个单独系统,用与文献[2～4]不同的阶梯算符方法来处理。文献[5, 6]曾用径向阶梯算符处理过二维和三维各向同性谐振子。在此基础上,用因式分解法找到高维空间各向同性谐振子的超径向阶梯算符,用于计算能量本征值和超径向本征函数,并给出归一化系数的一般公式。

在ν维空间超球坐标系中,各向同性谐振子的薛定谔方程是

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{1}{2}m\omega^2r^2\right]\psi(r,\Omega)=E\psi(r,\Omega) \qquad (1)$$

其中

$$r=\left(\sum_{j=1}^{\nu}x_j^2\right)^{1/2}$$

$$\nabla^2=\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\frac{1}{r^{\nu-1}}\left[\frac{d}{dr}\left(r^{\nu-1}\frac{d}{dr}\right)\right]-\frac{\hat{\Lambda}^2(\Omega)}{\hbar^2r^2}$$

$$\hat{\Lambda}^2=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k>j}\hat{\Lambda}_{jk}^2,$$

$$\hat{\Lambda}_{jk}=\frac{\hbar}{i}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$E>0$ 是谐振子能量,r 是超球半径,Ω 是广义立体角,∇^2 是ν维超球坐标系中的拉普拉斯算符,$\hat{\Lambda}^2$ 是广义角动量平方算符[7]。

分离变量后方程(1)变为

$$\hat{\Lambda}^2Y(\Omega)=\Lambda^2Y(\Omega) \qquad (2)$$

1996-12-19收稿, 1997-02-03修回。

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\nu-1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2m}{\hbar}\left(E-\frac{1}{2}mk^2r^2\right)+\frac{\Lambda^2}{\hbar^2r^2}\right]R(r)=0 \tag{3}$$

方程(2)的解是超球谐函数 $Y_{[k]}(\Omega)$,本征值是

$$\Lambda^2=\lambda(\lambda+\nu-2)\hbar^2 \tag{4}$$

其中 $\lambda=0,1,2,\cdots$ 是角量子数[7]。将式(4)代入方程(3),超径向薛定谔方程变为

$$\left[-\frac{d}{dr^2}-\frac{\nu-1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}mk^2r^2\right)+\frac{\lambda(\lambda+\nu-2)}{r^2}\right]R(r)=0 \tag{5}$$

其中 $R(r)$ 是超径向波函数。

令 $T=\sqrt{\frac{mk}{\hbar}}$, $X=\frac{E}{\hbar k}=n+\frac{\nu}{2}$, $(X>0, n$ 待定$)$, $Y=(Tr)^2$, $R(r)=T^{\frac{\nu-1}{2}}\nu(Y)/Y^{\frac{\nu}{4}}$,代入方程(5)经计算可得到

$$\left[-\frac{d^2}{dY^2}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2Y}+\frac{(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)(\lambda+\frac{\nu}{2})}{4Y^2}\right]\times\nu_{n\lambda}(Y)=-\frac{1}{4}\nu_{n\lambda}(Y) \tag{6}$$

用 Y^2 左乘方程(6)可得

$$\left[-Y^2\frac{d^2}{dY^2}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2}Y+\frac{1}{4}Y^2\right]\nu_{n\lambda}(Y)=-\frac{1}{4}(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)(\lambda+\frac{\nu}{2})\nu_{n\lambda}(Y) \tag{7}$$

1 量子数 λ 的阶梯算符

将方程(6)左边的二阶微分算符进行因式分解,可得到两条伴随方程

$$\left[-\frac{d}{dY}+\frac{\lambda+\frac{\nu}{2}-2}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)}\right]\times\left[\frac{d}{dY}+\frac{\lambda+\frac{\nu}{2}-2}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)}\right]\nu_{n\lambda}(Y)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{n+\frac{\nu}{2}}{\lambda+\frac{\nu}{2}-2}\right)^2-1\right]\nu_{n\lambda}(Y) \tag{8}$$

$$\left[\frac{d}{dY}+\frac{\lambda+\frac{\nu}{2}}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2(\lambda+\frac{\nu}{2})}\right]\left[-\frac{d}{dY}+\frac{\lambda+\frac{\nu}{2}}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2(\lambda+\frac{\nu}{2})}\right]\nu_{n\lambda}(Y)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{n+\frac{\nu}{2}}{\lambda+\frac{\nu}{2}}\right)^2-1\right]\nu_{n\lambda}(Y) \tag{9}$$

定义算符

$$(B_{n\lambda})_+=-\frac{d}{dY}+\frac{\lambda+\frac{\nu}{2}-2}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)} \tag{10}$$

$$(B_{n\lambda})_-=\frac{d}{dY}+\frac{\lambda+\frac{\nu}{2}-2}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)} \tag{11}$$

且令系数

$$b_{n\lambda}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{n+\frac{\nu}{2}}{\lambda+\frac{\nu}{2}-2}\right)^2-1\right] \tag{12}$$

则伴随方程(8)和(9)变为

$$(B_{n\lambda})_+(B_{n\lambda})_-\nu_{n\lambda}(Y)=b_{n\lambda}\nu_{n\lambda}(Y) \tag{13}$$

$$(B_{n,\lambda+2})_-(B_{n,\lambda+2})_+\nu_{n\lambda}(Y)=b_{n,\lambda+2}\nu_{n\lambda}(Y) \tag{14}$$

用 $(B_{n\lambda})_-$ 和 $(B_{n,\lambda+2})_+$ 分别左乘方程(13)和(14)得到

$$(B_{n\lambda})_-(B_{n\lambda})_+[(B_{n\lambda})_-\nu_{n\lambda}(Y)]=b_{n\lambda}[(B_{n\lambda})_-\nu_{n\lambda}(Y)] \tag{15}$$

$$(B_{n,\lambda+2})_+(B_{n,\lambda+2})_-[(B_{n,\lambda+2})_+\nu_{n\lambda}(Y)]=b_{n,\lambda+2}[(B_{n,\lambda+2})_+\nu_{n\lambda}(Y)] \tag{16}$$

将方程(15)和(16)分别与方程(14)和(13)对比,容易看出

$$(B_{n\lambda})_-\nu_{n\lambda}(Y)=b^-_{n\lambda}\nu_{n,\lambda-2}(Y) \tag{17}$$

$$(B_{n,\lambda+2})_+\nu_{n\lambda}(Y)=b^+_{n,\lambda+2}\nu_{n,\lambda+2}(Y) \tag{18}$$

其中 $b^-_{n\lambda}$ 和 $b^+_{n,\lambda+2}$ 是与归一化有关的系数。所以,$(B_{n\lambda})_-$ 和 $(B_{n\lambda})_+$ 分别是对角量子数 λ 的降算符和升算符,升降阶梯为 2个单位。

2 能量本征值

现在,利用升降算符 $(B_{n\lambda})_+$ 和 $(B_{n\lambda})_-$ 确定待定参数 n 的取值,从而求出能量本征值。对于能量 E 一定的束缚态,λ 不可能任意大,否则离心势将超过 E。设对于一定的 n 存在 λ 的最大值 λ',即无 $\lambda>\lambda'$ 的态,则必须有如下关系

$$(B_{n,\lambda'+2})_+\nu_{n\lambda'}(Y)=\left[-\frac{d}{dY}+\frac{\lambda'+\frac{\nu}{2}}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2(\lambda'+\frac{\nu}{2})}\right]\nu_{n\lambda'}(Y)=0 \tag{19}$$

用 $(B_{n,\lambda'+2})_-$ 左乘方程(19),并根据方程(14)和式(12),有

$$(B_{n,\lambda'+2})_-(B_{n,\lambda'+2})_+\nu_{n\lambda'}(Y)=$$

$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{n+\frac{\nu}{2}}{\lambda'+\frac{\nu}{2}}\right)^{2}-1\right]\nu_{n\lambda'}(Y)=0 \tag{20}$$

因为 $\nu_{n\lambda'}(Y)\neq 0$,所以根据方程(20)有

$$\left(\frac{n+\frac{\nu}{2}}{\lambda'+\frac{\nu}{2}}\right)^{2}-1=0 \tag{21}$$

由方程(21)解得

$n=-(\lambda'+\nu)$,(舍去,因不满足 $n+\frac{\nu}{2}=X>0$)

$$n=\lambda' \tag{22}$$

因为在一般情况下,$\lambda'=0,1,2,\cdots$,所以根据式(22),n的取值应为 $0,1,2,\cdots$.利用关系 $X=n+\frac{\nu}{2}=\frac{E}{\hbar k}$,得到 ν 维各向同性谐振子的能量本征值

$$E_n=(n+\frac{\nu}{2})\hbar k,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{23}$$

其中 n 是主量子数。

根据式(22)和式(17),在能量为 E_n 的态中,λ的其他取值应该是从 λ'开始以 2为阶梯的下降数列,即

$$\lambda=\begin{cases}0,2,4,\cdots,n, & n\text{为偶数}\\ 1,3,5,\cdots,n, & n\text{为奇数}\end{cases} \tag{24}$$

根据式(24),$(n-\lambda)$必为偶数,所以有关系

$$n=2n_r+\lambda,\quad n_r=0,1,2,\cdots \tag{25}$$

将式(25)代入式(23)得到

$$E_{n_r\lambda}=(2n_r+\lambda+\frac{\nu}{2})\hbar k,\ n_r,\lambda=0,1,2,\cdots \tag{26}$$

其中 n_r 是超径向量子数。

3 系数 $b^+_{n\lambda}$ 和 $b^-_{n\lambda}$

首先需明确超径向本征函数 $\nu_{n\lambda}(Y)$ 的归一化条件。根据 $R_{n\lambda}(r)$的归一化条件,以及关系 $Y=(Tr)^2$和 $R(r)=T^{\frac{\nu-1}{2}}\nu(Y)/Y^{\frac{\nu}{4}}$ 有

$$\int_0^{\infty}R^*_{n\lambda}(r)R_{n\lambda}(r)r^{\nu-1}\mathrm{d}r=\frac{1}{2T}\int_0^{\infty}\nu^*_{n\lambda}(Y)\nu_{n\lambda}(Y)Y^{1}\mathrm{d}Y=1 \tag{27}$$

用 $(B_{n\lambda})_+$ 左乘式(17),并利用方程(13)以及式(18)和式(27),可得系数 $b^+_{n\lambda}$ 和 $b^-_{n\lambda}$ 的一个关系

$$b^+_{n\lambda}b^-_{n\lambda}=b_{n\lambda} \tag{28}$$

由一阶微分方程(19)可解出主量子数为 n,角量子数 λ 取最大值 $\lambda'=n$ 的波函数

$$\nu_{n\lambda'}(Y)=\left[\frac{2T}{0!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2})}\right]^{1/2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2})}e^{-Y/2} \tag{29}$$

式(29)的波函数是用积分法归一化的。根据式(17),用 $(B_{n\lambda'})_-$ 作用于 $\nu_{n\lambda'}(Y)$ 得到

$$\nu_{n,\lambda'-2}(Y)=\frac{1}{b^-_{n\lambda'}}\left[\frac{2T}{0!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2})}\right]^{1/2}\times\frac{\lambda'+\frac{\nu}{2}-1}{\lambda'+\frac{\nu}{2}-2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2)}e^{-Y/2}\left[(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2)-Y\right] \tag{30}$$

将式(30)代入式(27),经计算可得

$$b^-_{n\lambda'}=\sqrt{\frac{1(\lambda'+\frac{\nu}{2}-1)}{\lambda'+\frac{\nu}{2}-2}} \tag{31}$$

将式(31)代入式(30)得到归一化的波函数

$$\nu_{n,\lambda'-2}(Y)=\left[\frac{2T}{1!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2}-1)}\right]^{1/2}\times Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2)}e^{-Y/2}\left[(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2)-Y\right] \tag{32}$$

用 $(B_{n,\lambda'-2})_-$ 作用于 $\nu_{n,\lambda'-2}(Y)$ 得到

$$\nu_{n,\lambda'-4}(Y)=\frac{1}{b^-_{n,\lambda'-2}}\left[\frac{2T}{1!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2}-1)}\right]^{1/2}\times\frac{\lambda'+\frac{\nu}{2}-2}{\lambda'+\frac{\nu}{2}-4}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)}e^{-Y/2}\left[(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-3)-2(\lambda'+\frac{\nu}{2}-3)Y+Y^2\right] \tag{33}$$

将式(33)代入式(27),经计算得到

$$b^-_{n,\lambda'-2}=\sqrt{\frac{2(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2)}{\lambda'+\frac{\nu}{2}-4}} \tag{34}$$

将式(34)代入式(33)得到归一化的波函数

$$\nu_{n,\lambda'-4}(Y)=\left[\frac{2T}{2!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2)}\right]^{1/2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)}e^{-Y/2}\left[(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-3)-2(\lambda'+\frac{\nu}{2}-3)Y+Y^2\right] \tag{35}$$

从式(31)和式(34)可以看出,$b^-_{n\lambda}$ 的一般公式是

$$b^-_{n\lambda}=b^-_{n,\lambda'-2n_r}=\sqrt{\frac{(n_r+1)\left[\lambda'+\frac{\nu}{2}-(n_r+1)\right]}{\lambda'+\frac{\nu}{2}-2(n_r+1)}} \tag{36}$$

将式(36)代入式(28),利用式(12)经计算得到 $b^+_{n\lambda}$ 的一般公式

$$b^+_{n\lambda}=b^+_{n,\lambda'-2n_r}=$$

$$\frac{(n_r+1)[\lambda'+\frac{\nu}{2}-(n_r+1)]}{\lambda'+\frac{\nu}{2}-2(n_r+1)} \tag{37}$$

4 超径向本征函数

根据式(17)和式(36),用降算符作用于 $\nu_{n\lambda'}(Y)$ 若干次,不需用式(27)便可直接得到主量子数为 n,角量子数 λ 取其他值的归一化超径向本征函数

$$\nu_{n\lambda}(Y)=\nu_{n,\lambda'-2n_r}(Y)=\prod_{j=0}^{n_r-1}\frac{(B_{n,\lambda'-2j})_-}{b^-_{n,\lambda'-2j}}\nu_{n\lambda'}(Y) \tag{38}$$

$$(B_{n\lambda'-2j})_-=\frac{d}{dY}+\frac{\lambda'+\frac{\nu}{2}-2(j+1)}{2Y}-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2[\lambda'+\frac{\nu}{2}-2(j+1)]} \tag{39}$$

利用式(38)和式(39)计算了 $n_r=3,4,5$ 三个归一化超径向本征函数:

$$\nu_{n,\lambda'-6}(Y)=\left[\frac{2T}{3!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2}-3)}\right]^{1/2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)}e^{-Y/2}[(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-5)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)-3(\lambda'+\frac{\nu}{2}-5)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)Y+3(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)Y^2-Y^3] \tag{40}$$

$$\nu_{n,\lambda'-8}(Y)=\left[\frac{2T}{4!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2}-4)}\right]^{1/2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-8)}e^{-Y/2}[(\lambda'+\frac{\nu}{2}-8)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-7)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-5)-4(\lambda'+\frac{\nu}{2}-7)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-5)Y+6(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-5)Y^2-4(\lambda'+\frac{\nu}{2}-5)Y^3+Y^4] \tag{41}$$

$$\nu_{n,\lambda'-10}(Y)=\left[\frac{2T}{5!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2}-5)}\right]^{1/2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-10)}e^{-Y/2}[(\lambda'+\frac{\nu}{2}-10)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-9)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-8)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-7)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)-5(\lambda'+\frac{\nu}{2}-9)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-8)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-7)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)Y+10(\lambda'+\frac{\nu}{2}-8)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-7)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)Y^2-10(\lambda'+\frac{\nu}{2}-7)(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)Y^3+5(\lambda'+\frac{\nu}{2}-6)Y^4-Y^5] \tag{42}$$

从式(29)、(32)、(35)和式(40)~式(42)看出,主量子数为 n,角量子数 $\lambda=\lambda'-2n_r=n-2n_r$ 的归一化超径向本征函数可表示为

$$\nu_{n\lambda}(Y)=\nu_{n,\lambda'-2n_r}(Y)=\left[\frac{2T}{n_r!\,\Gamma(\lambda'+\frac{\nu}{2}-n_r)}\right]^{1/2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2n_r)}e^{-Y/2}\{\sum_{i=0}^{n_r-1}(-1)^i\times C^i_{n_r}[\prod_{j=i}^{n_r-1}(\lambda'+\frac{\nu}{2}-2n_r+j)]Y^i+(-Y)^{n_r}\}=\left\{\frac{2T\Gamma(\lambda+\frac{\nu}{2}+n_r)}{n_r!\,[\Gamma(\lambda+\frac{\nu}{2})]^2}\right\}^{1/2}Y^{\frac{1}{2}(\lambda+\frac{\nu}{2})}F(-n_r,\lambda+\frac{\nu}{2},Y) \tag{43}$$

其中 $C^i_{n_r}$ 是组合数,$F(-n_r,\lambda+\frac{\nu}{2},Y)$ 是合流超几何级数[8]。由式(43)利用关系 $Y=(Tr)^2$ 和 $R(r)=T^{\frac{\nu-1}{2}}\nu(Y)/Y^{\nu/4}$ 可得超径向本征函数 $R_{n\lambda}(r)$。

5 量子数 n 的阶梯算符

将方程(7)左边的二阶微分算符进行因式分解,可得到另外两条伙伴方程

$$\left[-Y\frac{d}{dY}+\frac{1}{2}Y-\frac{n+\frac{\nu}{2}-2}{2}\right]\left[Y\frac{d}{dY}+\frac{1}{2}Y-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2}\right]\nu_{n\lambda}(Y)=\frac{1}{4}[(n+\frac{\nu}{2}-2)(n+\frac{\nu}{2})-(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)(\lambda+\frac{\nu}{2})]\nu_{n\lambda}(Y) \tag{44}$$

$$\left[Y\frac{d}{dY}+\frac{1}{2}Y-\frac{n+\frac{\nu}{2}+2}{2}\right]\left[-Y\frac{d}{dY}+\frac{1}{2}Y-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2}\right]\nu_{n\lambda}(Y)=\frac{1}{4}[(n+\frac{\nu}{2})(n+\frac{\nu}{2}+2)-(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)(\lambda+\frac{\nu}{2})]\nu_{n\lambda}(Y) \tag{45}$$

定义算符

$$(A_{n\lambda})_+=-Y\frac{d}{dY}+\frac{1}{2}Y-\frac{n+\frac{\nu}{2}-2}{2} \tag{46}$$

$$(A_{n\lambda})_-=Y\frac{d}{dY}+\frac{1}{2}Y-\frac{n+\frac{\nu}{2}}{2} \tag{47}$$

且令系数

$$a_{n\lambda}=\frac{1}{4}[(n+\frac{\nu}{2}-2)(n+\frac{\nu}{2})-(\lambda+\frac{\nu}{2}-2)(\lambda+\frac{\nu}{2})] \tag{48}$$

则伙伴方程(44)和(45)变为

$$(A_{n\lambda})_{+}(A_{n\lambda})_{-}\nu_{n\lambda}(Y)=a_{n\lambda}\nu_{n\lambda}(Y) \quad (49)$$

$$(A_{n+2,\lambda})_{-}(A_{n+2,\lambda})_{+}\nu_{n\lambda}(Y)=a_{n+2,\lambda}\nu_{n\lambda}(Y) \quad (50)$$

可以证明,$(A_{n\lambda})_{+}$ 和 $(A_{n\lambda})_{-}$ 分别是对主量子数 n 的升算符和降算符

$$(A_{n\lambda})_{-}\nu_{n\lambda}(Y)=\bar{a}_{n\lambda}\nu_{n-2,\lambda}(Y) \quad (51)$$

$$(A_{n+2,\lambda})_{+}\nu_{n\lambda}(Y)=\overset{+}{a}_{n+2,\lambda}\nu_{n+2,\lambda}(Y) \quad (52)$$

其中 $\bar{a}_{n\lambda}$ 和 $\overset{+}{a}_{n+2,\lambda}$ 是与归一化有关的系数。

利用升降算符 $(A_{n\lambda})_{+}$ 和 $(A_{n\lambda})_{-}$,同样可以求出能量本征值和超径向本征函数。可以找出系数 $\overset{+}{a}_{n\lambda}$ 和 $\bar{a}_{n\lambda}$ 的一般公式

$$\overset{+}{a}_{n\lambda}=\overset{+}{a}_{n+2n_r,\lambda}=-\sqrt{n_r\left[\lambda+\frac{\nu}{2}+(n_r-1)\right]} \quad (53)$$

$$\bar{a}_{n\lambda}=\bar{a}_{n+2n_r,\lambda}=-\sqrt{n_r\left[\lambda+\frac{\nu}{2}+(n_r-1)\right]} \quad (54)$$

6 结语

上述所有结果,不仅适用于高维空间各向同性谐振子,也适用于二维和三维各向同性谐振子。很明显,当 $\nu=2, 3$时,升降算符式(10)、(11)、(46)和(47),能量本征值式(23)和(26),归一化系数式(36)、(37)、(53)和(54),以及本征波函数式(29)、(32)、(35)、(40)~(42),均与文献[5,6]中的相应结果完全一致。

本文方法处理的对象虽然是各向同性谐振子系统,但也可用于处理式(0)中的耦合振子系统,这是下步进行的工作。

参考文献

1 Saxon DS. Elementary Quantum Mechanics. San Francisca Holden-Day, 1968.

2 Fan Hongyi. Unitary transformation for four Harmonically coupled identical oscillators. Phys Rev A, 1990, 42(7): 4377.

3 Michelot F. Solution for an arbitrary number of coupled identical oscillators. Phys Rev A. 1992, 45(7): 4271.

4 Fan Hongyi. Unitary operator for an arbitrary number of coupled identical oscillators. Phys Rev A, 1993, 47(3): 2379.

5 张文英. 用因式分解法求解二维各向同性谐振子. 广西大学学报(自然科学版), 1995, 20(3): 245~249.

6 张文英. 用因式分解法求解三维各向同性谐振子. 见: 王殖东, 丁慎训主编, 大学物理研究, 南宁: 广西科学技术出版社, 1995. 114~121.

7 Smith FT. Generalized Angular Momentum in Many-Body Collisions. Physical Review, 1960, 120(3): 1064~1067.

8 王竹溪. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1979. 328.

(责任编辑: 蒋汉明)

Ramsey数 $R(5,9)\geq 114$

S. P. Radziszowski在1993年发表了一篇关于Ramsey数权威性的综述文章: Small Ramsey Numbers. 在这篇文章中 $R(5,q)$ 下界的已知情况是这样的: $R(5,5)\geq 43$, $R(5,6)\geq 58$, $R(5,7)\geq 76$, $R(5,8)\geq 95$, 再往后是未知的。

谢继国、张忠辅在1996年第20期《科学通报》上给出了 $R(5,9)\geq 98$, $R(5,10)\geq 106$. 张正铀、苏文龙、罗海鹏在1997年第2期《广西科学》上给出了 $R(5,11)\geq 114$.

根据S. P. Radziszowski 1997年7月3日通过因特网寄给我们的综述《Small Ramsey Numbers》的扩充、修改版本征求意见稿, N. J. Calkin, P. Erdös和A. D. Polimeni给出了 $R(5,9)\geq 114$, 文章待发表。这是一个很强的结果。

我们通过计算机构造了一个113个顶点的循环图,也给出了和上述几个作者相同的 $R(5,9)\geq 114$的结果。简介如下: 依照《经典Ramsey数 $R(5,11)$ 的下界》〔广西科学, 1997, 4(2): 84, 92〕中的定义和方法,我们通过计算机构造了一个113个顶点的循环图 G_{113}, 它的参数集 $S=\{1, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 17, 19, 22, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 43, 45, 46, 47, 51, 54\}$. 我们在计算机上验证了, G_{113}中即不含5点团 K_5, 也不含9独立点集 $\bar{K}_9$, 即证明了 $R(5,9)\geq 114$.

(苏文龙、罗海鹏、张正铀)