

失稳周期轨道的寻找与控制*

Finding and Control of Unstable Periodic Orbit

刘宗华

陈光旨

Liu Zonghua

Chen Guangzhi

(广西大学物理系 南宁市西乡塘东路 10号 530004)

(Dept. of Physics, Guangxi University, 10 East Xixiangtanglu, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 提出一种在噪声存在的情况下依然有效的控制失稳周期轨道的方法。此法以一本征方向代表轨道方向,将三维微分系统简化为二维微分系统,用 Lyapunov 指数谱解释取得控制的原因。另介绍两种在自治微分系统中寻找失稳周期轨道的方法。

关键词 失稳周期轨道 本征值 控制

Abstract A method used to control unstable periodic orbit is presented, which is effective in presence of noise. Differential system in the method would be changed from three-dimension to two-dimension in terms of an intrinsic direction which could express orbit direction, and the results could be explained with Lyapunov exponent spectra. This paper also introduces two methods which are used to find the unstable periodic orbit in autonomous differential system.

Key words unstable periodic orbit, eigenvalue, control

中图分类号 O414

混沌控制的一个重要问题是寻找失稳周期轨道(UPO)。在迭代系统中,若选择了合适的初值,即可由牛顿法迅速地得到 UPO。在微分系统中,由于系统的轨道不是由分立的点而是由连续的轨道组成,此问题变得复杂。微分方程可分为两种情形,其一为自治系统,另一为非自治系统。对于后者,由于存在着外部周期性的驱动力,系统的周期可取外部驱动周期为参考周期。对于前者,由于没有外部参考周期,就给寻找 UPO 带来了困难。许多作者研究了此问题^[1~4],但并没有完全解决它。例如, K. T. Hansen^[1]最近提出了一种用编好序的符号动力学来寻找混沌系统中的失稳周期轨道与非周期轨道,然而它仅能用于具有吸引势的系统。J. Botina 与 H. Robitz 提出了另一种方法^[2],此法通过构造消费函数来确定哈密顿系统中的规则轨道。本文中,我们以近周期轨道为出发点来给出寻找 UPO 的切线法与符号动力学方法。

现在有多种能实现混沌控制与瞄准的方法^[5~12]。所有这些方法之中, O. G. Y. 法最优,由于

其对系统参数的微小扰动可为实验实现。本文中我们提出了一种新的控制混沌的方法。

1 寻找失稳周期轨道

控制混沌的一个重要问题是寻找 UPO。对微分系统,通常利用 Poincaré 截面来发现周期轨道。如果 Poincaré 截面上的第 n 个点与第 m 个点重合,则轨道为 $(m - n)$ 周期。由于混沌轨道对初值的极端敏感性 & 指数分离性,如果 Poincaré 截面上的某点在运行了 N 圈后能回到其邻域,则我们认为在此点附近存在着一个 UPO, 这点即是近周期点。我们寻找 UPO 的方法就是以此点为基础,然后让轨道逐步逼近 UPO。这里我们介绍两种寻找 UPO 的方法。

1.1 切线法

自治微分系统的轨道通常是由数值计算得到的,为此可将连续的微分系统转换为分立的迭代系统来处理。通常 Poincaré 截面上初值点的迭代在运行了一些积分步长返回时,并不会正好落在同一截面上。如果我们近似地认为 Poincaré 截面附近的点就权当着处于截面上,这样就会导致某些穿过截面的点的重复计算,而其它点又没有计算到。解决此问题的一个

1996-09-02收稿,1997-01-16修回。

* 得到国家自然科学基金资助。

较好的方法是 Hénon 方法,其思想如下:假定第 n 步在 Poincaré 截面下面,而第 $(n+1)$ 步在截面上面,则与截面的交点必定在这两点之间.为确定交点的位置,我们用第 n 步与 Poincaré 截面间的距离来确定一合适的积分步长,以便第 $(n+1)$ 步正好落在 Poincaré 截面上.

如果 Poincaré 截面上的点 X_0 与 X_1 非常近,则附近可能有一精确的周期点 X^* ,其周期为 T^* .用 Sparrow^[13] 给出的方法,我们能得到 UPO.对 Lorenz 模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= Vx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \quad (1)$$

图 1 是用此方法在参数 $\sigma=10, V=28, B=\frac{8}{3}$ 时获得的结果,它是 UPO-2 对 Rössler 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + Z(-c + x) \end{aligned} \quad (2)$$

图 2 是在参数 $a=b=0.2, c=5.7$ 时的结果,它是一个 UPO-3.

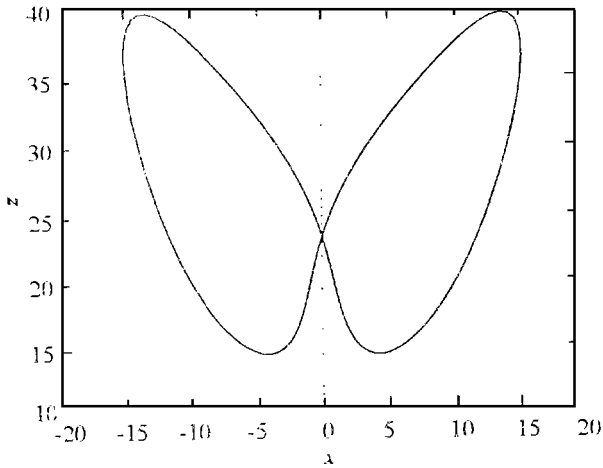


图 1 Lorenz 模型混沌区 $\sigma=10, V=28, b=\frac{8}{3}$ 处的 UPO-2 轨道

Fig. 1 The orbit of UPO-2 of Lorenz model in chaotic region at $\sigma=10, V=28, b=\frac{8}{3}$

1.2 参数追踪法

在混沌带的周期窗口处,系统可通过自由行走而趋近稳定的周期轨道.因此使用稳定周期轨道作为初始点就可解决混沌带中为得到 UPO 而初值点难找的问题,然后让参数作一小的改变,此时系统进入混沌带.用此初值点及切线法就可迅速地找到混沌区中的 UPO.按照符号动力学,用相邻字来产生揉序列便可确定混沌区中一些窄的周期窗口.文献 [14] 给出

了在 $\sigma=10.0, b=\frac{8}{3}$ 时,对应不同参数 γ 的符号字,我们则给出了五模双扩散对流模型的符号字^[15].因此参数追踪法在这种情况下就相当有利.我们将另文介绍此法寻找 UPO 的详细过程.

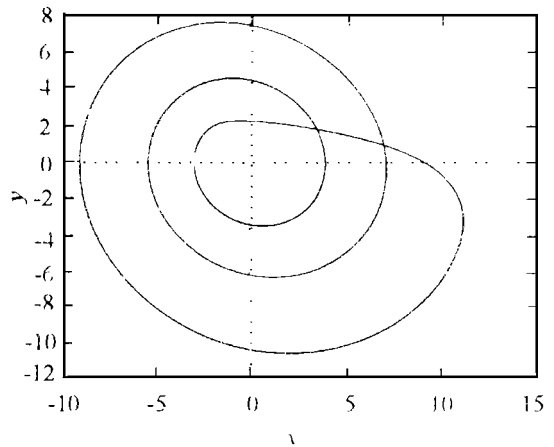


图 2 Rössler 系统混沌区 $a=b=0.2, c=5.7$ 处的 UPO-3 轨道

Fig. 2 The orbit of UPO-3 of Rössler system in chaotic region at $a=b=0.2, c=5.7$

2 控制失稳周期轨道

众所周知,奇怪吸引子至少有三个 Lyapunov 指数.对三维耗散系统,唯一的可能性是 $(+, 0, -)$,即 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ 与 $\lambda_3 < 0$.由于收缩必须超过膨胀,因此稳定三维混沌的进一步条件为 $\lambda_3 < -\lambda_1$.由于 $\lambda_2 = 0$ 代表轨道运动的方向,因此在控制中无需考虑此方向,仅需将 λ_1 变为负即可.因此,我们认为通过调节参数来将两上合适方程的条件本征值变为负从而控制混沌总是可能的.这里“条件”意味着挑选的两个方程的两个本征值与原三维系统间有某种关系.然而人们不可能总是成功地做到这一点.为解决此问题我们通过研究 Lyapunov 指数谱来找出合适的方程与调节参数.

对于本文考虑的三维自治系统,系统 Jacobian 的一个本征方向代表轨道方向,若能让其它的两个本征值变为负就实现了控制.为方便起见,我们暂时从 (1) 式或 (2) 式中挑出两个方程,而把第三个方程当作“自由方程”.下面以 Rössler 系统为例来说明具体操作方法.

对于 Rössler 系统 (2),我们首先考虑 \dot{x}, \dot{y} 方程情形,而将 \dot{z} 方程当作自由方程.如果按如下方式调节参数

$$a = \bar{a} - X(y - \bar{y}) \quad (3)$$

其中 \bar{a} 为参数 a 的标称值 $0.2, \bar{y}$ 是上面求得的 UPO

轨道, X 为控制参数. 则其本征值满足

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & \bar{a} - \bar{y}X - \lambda \end{pmatrix} \quad (4)$$

由(4)可知当 $|X| > \frac{(2+\bar{a})}{\bar{y}}$ 时, 本征值 $\lambda_{1,2} < 0$, 这就是控制参数 X 的范围. 为避免 X 太大, 当 $|\bar{y}| < 1$ 时我们让系统自由行走, 即对参数不作调节. 图 3(a) 是取 $X = \frac{2.3}{\bar{y}}$ 的控制结果, 可见很快就控制到了 UPO-3 上. 由于此种控制方法的控制参数 X 依赖于待控制的轨道 (\bar{y}), 故它能较迅速地实现控制. 实现控制后因 $y = \bar{y}$, 故(3)式中的参数 $a = \bar{a}$. 若因为外界微扰使控制后的轨道稍微偏离 UPO, 则参数将按照(3)式自动地作出相应调节, 从而保证系统稳定地运行在 UPO-3 上.

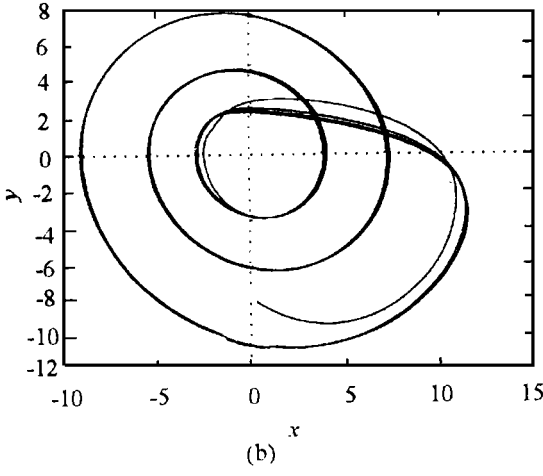
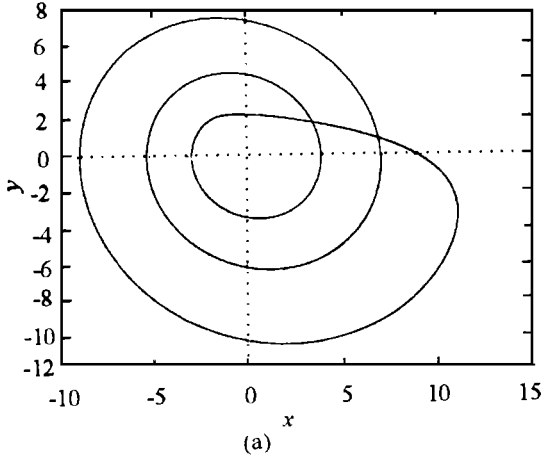


图 3 Rossler 系统 UPO-3 的控制, 初值 (0.1, -8.0, 0.03)

Fig. 3 The control of UPO-3 of Rossler system. The initial point is (0.1, -8.0, 0.03).

(a) 无噪声; (b) 加强度为 2.9×10^{-3} , 平均值为 0 的噪声.
(a) No noise; (b) The intensity of noise is 2.9×10^{-3} , the average value of noise is zero.

其次考虑 \dot{y}, \dot{Z} 方程情形, 而将 \dot{x} 方程当作自由方程. 如果按如下方式调节参数 a

$$a = \bar{a} - X(y - \bar{y}) \quad (5)$$

则有

$$\begin{pmatrix} \bar{a} - X\bar{y} - \lambda & 0 \\ 0 & \bar{x} - c - \lambda \end{pmatrix} \quad (6)$$

显然 $\lambda_1 = X - c, \lambda_2 = \bar{a} - X\bar{y}$. 由图 2 中的 UPO-3 轨道可知, λ_1 在大部分范围内小于零, 因此只需调节 ϵ 以便 $\lambda_2 < 0$ 即可. 此时的控制结果与图 3(a) 类似. 若调节参数 b, c 时, 则无法满足 $\lambda_{1,2} < 0$, 即调节参数 b, c 无法实现控制.

最后我们考虑 \dot{x}, \dot{Z} 方程情形, 而将 \dot{y} 方程当作自由方程, 此时只能调节参数 b, c , 我们的数值模拟实验表明此时无法实现控制. 至此我们得到结论, 对 Rossler 系统, 只有调节参数 a 方能做到控制.

为了解释上述结果, 现在来考查 Lyapunov 指数谱. 对于(3)式的参数调节方式, 令

$$X = \begin{cases} \frac{k}{\bar{y}}, & \text{当 } |\bar{y}| > 0.1 \\ 0, & \text{否则} \end{cases} \quad (7)$$

然后研究此种情形下(2)式的条件 Lyapunov 指数. 这里“条件”意味着参数调节量 ϵ 依赖于 UPO. 图 4 是(2)式的最大 Lyapunov 指数 λ_{max} 与调节参数 k 之间的关系. 由图 4 可见, 当参数调节 k 从 1 变化到 100 时, λ_{max} 均为负, 因此混沌能被控制住. 对于调节参数 b 的情形, 令 $b = \bar{b} - X(Z - \bar{Z})$, 图 5 是其结果. 可见当 ϵ 从 0.1 变化到 10 时, 其最大 Lyapunov 指数一直为正, 因此通过调节参数 b 无法实现 UPO 的控制.

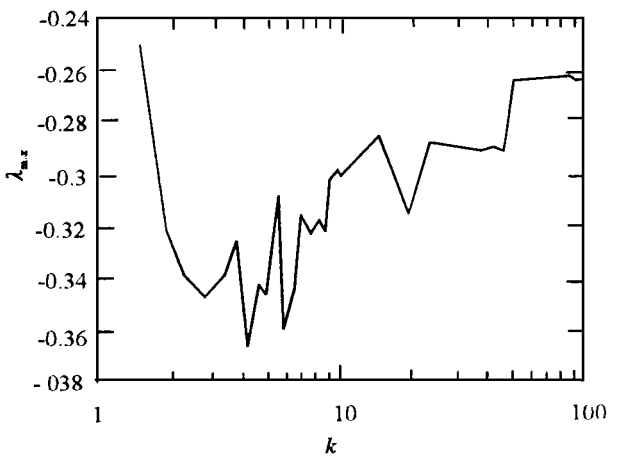


图 4 Rossler 系统的最大条件 Lyapunov 指数谱调节方式为 $a = \bar{a} - \frac{k}{\bar{y}}(y - \bar{y})$

Fig. 4 The largest conditional Lyapunov exponent spectra of Rossler system. The adjusting fashion is $a = \bar{a} - \frac{k}{\bar{y}}(y - \bar{y})$

对于 Lorenz 模型, 我们的数值模拟表明: 只有选择 (1) 式中的 \dot{x} 方程, 而将 \dot{z} 方程作为自由方程时控制结果较好. 此时的参数调节如下

$$V = \dot{V} - X(y - \bar{y}) \quad (8)$$

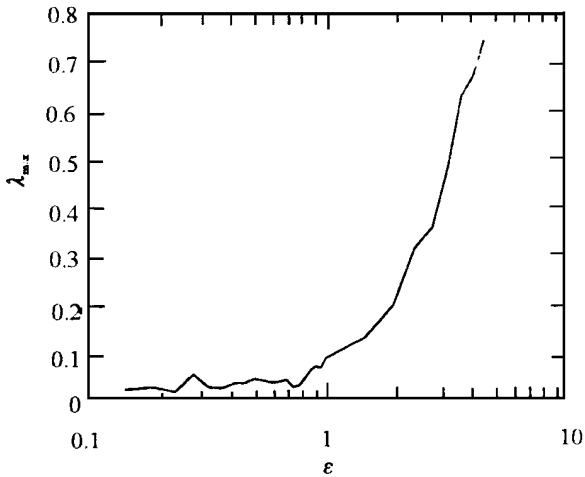


图 5 Rossler 系统的最大条件 Lyapunov 指数谱. 调节方式为 $b = \bar{b} - X(Z - \bar{Z})$

Fig. 5 The largest conditional Lyapunov exponent spectra of Rossler system. The adjusting fashion is $b = \bar{b} - X(Z - \bar{Z})$

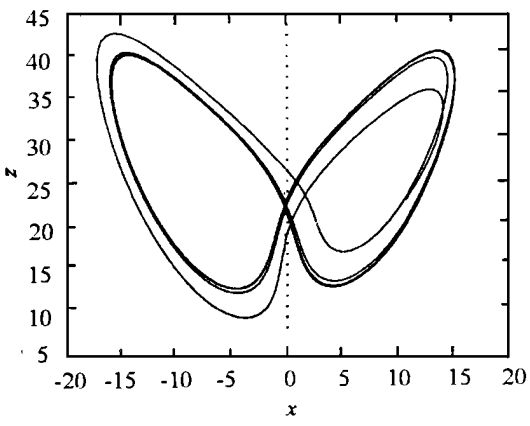


图 6 Lorenz 系统 UPO-2 的控制, 初值 (10, 20, 21)
Fig. 6 The control of UPO-2 of Lorenz system. The initial point is (10, 20, 21)

我们有

$$\begin{pmatrix} -1 - X\bar{x} - \lambda & -\bar{x} \\ \bar{x} & -b - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (9)$$

由 $\lambda_{1,2} < 0$ 得

$$X = \begin{cases} \frac{2\bar{x} + b}{\bar{x}}, & \text{当 } |\bar{x}| > 0.1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (10)$$

其控制结果如图 6. 可见其控制情形与 Rossler 系统有些类似.

为了检验此种方法能否用于实验, 现来研究噪声效应. 我们在 (2) 式 \dot{x} 方程的右端加上一随机项, 比如平均值为零均方值为 2.9×10^{-3} 的高斯白噪声. 图 3 (b) 为其控制结果, 可见虽然控制时间变长且控制轨道变粗, 但依然能控制住. 所以我们的方法能用于实验.

综上所述, 我们提出了一种控制混沌的方法. 此法根据有一本征方向代表轨道方向, 从而将三维微分系统简化为二维系统来处理, 并用 Lyapunov 指数谱来解释了能取得控制的原因.

参考文献

- 1 Hansen K T. Phys Rev E, 1992, 52 2388.
- 2 Botina J, Rabitz H. Phys Rev Lett, 1995, 75 2948.
- 3 Grebogi C, Hammel S M, Yorke J A et al. Phys Rev Lett, 1990, 65 1527.
- 4 Toroczkai Z. Phys Lett, 1994, A 190 71.
- 5 Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Phys Rev Lett, 1990, 64 1196.
- 6 Romeiras F J, Grebogi C, Ott E et al. Physica, 1992, D 58 166.
- 7 Shinbrot T, Grebogi C, Ott E et al. Nature, 1993, 363 411.
- 8 Pyragas K. Phys Lett 1992, A 170 421.
- 9 Qu Zhilin, Hu Guang, Ma Benkun. Phys Lett, 1993, A 178 265.
- 10 Huberman B A. Elumer IEEE Trans. on Cir and Sys, 1990, 37 547.
- 11 Kapitaniak T. Chaos, Solitons & Fractals, 1992, 2 519.
- 12 Ni Wansun, Qin Tuanfa, Liu Zonghuo et al. Phys Lett, 1995, A 203 102.
- 13 Sparrow C. The Lorenz Equations: bifurcation, chaos and strange attractors. Springer-Verlay, 1982.
- 14 Hao Bailin. Elementary symbolics and chaos in dissipative systems. World Scientific, 1989.
- 15 Fang H P, Liu Z H. Phys Rev, 1994, E 50 2790.

(责任编辑: 蒋汉明)