DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.02.004

广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (2): 85~ 86

Laguerre级数在收敛抛物线上的性态
Behaviour of Laguerre Series on the Parabola of Convergence

木乐华
Mu Lehua

(山东大学数学系 山东济南 250100)

(Dept. of Math., Shandong Univ., Jinan, Shandong, 250100)

摘要 讨论反映广义 Laguerre级数在收敛抛线上性态的 Fatou型定理.

关键词 Fatou型定理 Laguerre级数 收敛抛物线

Abstract We discuss the Fatou type theorem which reflects the behaviour of the general Laguerre series on the parabola of convergence.

Key words Fatou type theorem, Laguerre series, parabola of convergence

中图法分类号 O174.21

作为复变得的广义 Laguerre级数是较近代才开始研究的一种新级数,它的收敛区域是由抛物线围成的无界区域[1]. Szász和 Yeardley给出了解析函数用 Laguerre级数表示的十分重要的结果[1]. 但之后对这种典型的级数的研究年来一直是个空白. 在文献[2]中我们曾考虑过其过度收敛和奇点问题,这里将讨论在函数和系数的混合条件下的反映级数在收敛抛物线上的性态的 Fatou定理.

用 H_f 标记抛物线 $Z = -(f + iy)^2 (-\infty < y <+\infty)$. 用 G_f 和 D_f 分别标记 H_f 的内部和外部,即 G_f: $Z = -(r + iy)^2$ $(r < f, -\infty < y <+\infty)$, G_f: $Z = -(r + iy)^2$ $(r < f, -\infty < y <+\infty)$. 记 $L_n^{(a)}(Z)$ 是广义的 n 次 Laguerre多项式:[3]

$$L_n^{(a)}(Z) = \frac{1}{n} e^Z Z^{-a} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(e^{-z} Z^{n+a}\right),\ a > -1.$$

如果 $f = -\overline{\lim}(2n^{1/2})^{-1}\log|T_n|$ $(0 < f < \infty)$,则广义 Laguerre级数 $\sum_0^\infty T_n L_n^{(T)}(Z)$ 收敛曲线的抛物线 H_f[1],且在 G_f 中收敛,在 D_f 中发散.

定理 (Fatou型定理) 设广义 Laguerre级数:

$$\sum_0^\infty \alpha_n L_n^{(\alpha)}(Z) \quad (\alpha > -1) \tag{1}$$

的收敛抛物线是 H_f, 在 G_f 中其和为 $f(Z)$. 若系数

$$a_n = 0\left(n^{-\frac{T}{2}-\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{n}f}\right) \tag{2}$$

且 $f(Z)$ 在 H_f 上一点 Z_0 处解析. 则级数 (1) 在 H_f 上含点 Z_0 的一弧上一致收敛.

证 令 $Z_0 = -(f + iy_0)^2$

由 $f(Z)$ 在 Z_0 解析知,存在 $\delta > 0$ 使得 $f(Z)$ 在由下面四条抛物线:

$H_{f\pm W}$ $\quad Z = -(f \pm W + iy)^2, (-\infty < y <+\infty)$,

$H_{y_0 \pm W}$ $\quad Z = -(x \pm i(y_0 + W))^2, (-\infty < x <+\infty)$

所围成的闭四边形域 $\overline{D}_W$ 中解析, 记其边界 ∂D_W 的四个顶点为 a_i, Z_i $(i = 1, 2)$, 抛物线 $h_{y_0\pm}$ 和 H_f 的交点为 ζ_i $(i = 1, 2)$:

$$Y_1 = -(f + i(y_0 + W))^2,$$

$$Y_2 = -(f + i(y_0 + W))^2, \tag{3}$$

(如图 1)

考虑函数

$$P_n(Z) = \frac{n^{\frac{T}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{n}f}(Z - Y_1)(Z - Y_2)}{L_n^{(T)}(Z)}\Big(f(Z) - \sum_0^n T_j L_j^{(T)}(Z)\Big) \tag{4}$$

下面将在边界 ∂D_W 上估计 $|P_n(z)|$.

由广义 Laguerre多项式的渐近公式[3]可知,

1997-02-18收稿

当 $Z\in \overline{D}_W$时，有

$$L_n^{(T)}(Z) = \frac{1}{2}\text{c}有^{-1/2}e^{\frac{Z}{2}}(-Z)^{-\frac{T}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{T}{2}-\frac{1}{4}}e^{2(-nz)^{\frac{1}{2}}}\{1 + O(\frac{1}{n})\} \quad (5)$$

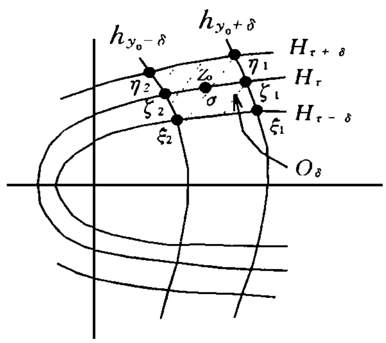

图 1　$H_{\pm W}$与 $h_{y_0\pm W}$所围成的闭四边形$\overline{D}_W$

Fig. 1 Closed curvilinear quadrilateral $\overline{D}_W$ surrounded by $H_{\pm W}$ and $h_{y_0\pm W}$

这里多值函数 $(-Z)^{-\frac{T}{2}-\frac{1}{4}}$和 $(-Z)^{\frac{1}{2}}$是选取当 $Z<0$时取正实值的一支，式中项“O”的界仅与 δ有关．

任给 ε> 0. 由公式 (5) 和已知条件 (2) 知，存在自然数 N_1，当 $n> N_1$时，下列两式同时成立:

$$|T_n| < Xn^{-\frac{T}{2}-\frac{1}{4}}e^{-2\sqrt{n}f} \quad (6)$$

和当 $z\in \overline{D}_W$时，

$$K_1 n^{\frac{T}{2}-\frac{1}{4}}e^{2\sqrt{n}Re\sqrt{-Z}} \leqslant |L_n^{(T)}(Z)| \leqslant K_2 n^{\frac{T}{2}-\frac{1}{4}}e^{2\sqrt{n}Re\sqrt{-Z}}$$

(K_1、K_2是依赖 W的正常数)． (7)

现在我们首先考虑弧$\widehat{\xi_2\eta_2}$，将其分成两部分．

① 当 $Z\in \widehat{a_2Y_2}-\{Y_2\}$ 时，有

$$Z = -(f - Z + i(y_0 - W))^2 \in G_f \quad (0 < Z \leqslant W) \quad (8)$$

于是级数 (1) 在点 Z收敛且 $Re\sqrt{-Z} = f - Z$，从而由 (6)、(7) 式知，

$$|f(Z) - \sum_0^n T_jL_j^{(T)}(Z)| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty}|T_jL_j^{(T)}(Z)| \leqslant K_2X\sum_{n+1}^{\infty}j^{-\frac{1}{2}}e^{-2\sqrt{j}Z} \leqslant K_2X\int_n^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-2\sqrt{j}Z}dx = K_2X\int_n^{\infty}e^{-2\sqrt{j}}d(2\sqrt{x}) \leqslant \frac{K_2X}{Z}e^{-2\sqrt{n}Z} \quad (9)$$

进而由 (4) 和 (7) 式得到

$$|P_n(Z)| \leqslant \frac{KX}{Z}|(Z - Y_1)(Z - Y_2)|, \quad n > N_1$$

这里及以后 K 仅和 W有关．

再由 (3) 和 (8) 式知，$|(Z - Y_1)(Z - Y_2)| \leqslant KZ$，于是有 $|P_n(Z)| \leqslant KX$, $n > N_1$.

② 当 $Z\in \widehat{Y_2Z_2}-\{Y_2\}$ 时，有

$$Z = -(f + Z + i(y_0 - W))^2 \in G_f \quad (0 < Z \leqslant W) \quad (10)$$

由于 $f(Z)$ 在 $\overline{D}_W$中有界，故

$$|f(Z) - \sum_0^n T_jL_j^{(T)}(Z)| \leqslant K + \sum_{N_1+1}^{n}|T_jL_j^{(T)}(Z)| \leqslant K + K_2X\sum_{N_1+1}^{\infty}j^{-\frac{1}{2}}e^{2\sqrt{j}Z} \leqslant K + K_2X\int_{N_1+1}^{n+1}x^{-\frac{1}{2}}e^{2\sqrt{x}Z}dx \leqslant K + \frac{K_2X}{Z}e^{2\sqrt{n+1}Z}, (n > N_1) \quad (11)$$

再由 (3) 和 (10) 式知，$|(Z - Y_1)(Z - Y_2)| \leqslant KZ$. 于是由 (4) 和 (7) 式得到，$|P_n(Z)| \leqslant K(\frac{Z}{e^{2\sqrt{n}Z}}) + Xe^{2Z(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$. 此时 $\eta \leqslant \delta$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant 1$, 又从 $e^{2\sqrt{n}Z} > 1 + 2\sqrt{n}Z$知，$\frac{Z}{e^{2\sqrt{n}Z}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. 从而得到

$$|P_n(Z)| \leqslant K(X + \frac{1}{\sqrt{n}}), n > N_1.$$

结合①②和 $P_n(Y_2) = 0$得到，当 $Z\in \widehat{a_2Z_2}$时，有

$$|P_n(Z)| \leqslant K(X + \frac{1}{\sqrt{n}}), n > N_1.$$

类似地有① 当 $Z\in \widehat{\xi_1\eta_1}$时，上式也成立．(证明略)

② 当 $Z\in \widehat{a_1a_2}$时，有

$$|f(Z) - \sum_0^n T_jL_j^{(T)}(Z)| \leqslant \frac{KX}{W}e^{-2\sqrt{n}W}(n > N_1)$$

进而有 $|P_n(Z)| \leqslant KX(n > N_1)$. (证明略)

② 当 $Z\in \widehat{Z_1Z_2}$时，有

$$|f(Z) - \sum_0^n T_jL_j^{(T)}(Z)| \leqslant K + \frac{K_2X}{W}e^{2\sqrt{n+1}W}(n > N_1)$$

进而有 $|P_n(Z)| \leqslant K(\frac{1}{e^{2\sqrt{n}W}} + X)$, 又有

$$|P_n(Z)| \leqslant K(\frac{1}{\sqrt{n}} + X), (n > N_1). \text{(证明略)}.$$

综上所述，存在自然数 $N > N_1$，当 $n > N$且在∂D_W上有 $|P_n(Z)| \leqslant KX$.

由于 $f(Z)$ 在$\overline{D}_W$上解析故 $P_n(z)$ 在$\overline{D}_W$上解析，

应用解析函数的最大模原则[4]，当 n> N时，有

$$|P_n(Z)| \leqslant K X,\ Z \in \bar{D}_W. \qquad (12)$$

现在 H_f 上取含 Z_0 的弧 e: $Z= -(f+ iy)^2$，$|y - y_0| \leqslant \frac{W}{2}$. 由 (3) 式知，当 $Z\in$ e时，

$|Z - Y_1| = |y_0 - y + W| |2f + i(y + y_0 + W)| \geqslant fW$,

$|Z - Y_2| \geqslant fW$. 再由 (12) (7) 和 (4) 式知，当 $Z\in$ e，$n > N$ 时，有

$$\left| f(Z) - \sum_0^n a_j L_j^{(a)}(Z) \right|$$

$$= \left| \frac{P_n(Z) L_j^{(a)}(Z)}{n^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}} e^{2\sqrt{n}f} (Z - Y_1)(Z - Y_2)} \right| \leqslant K X$$

于是级数 (1) 在 e上一致收敛，定理得证

由定理显然可得判断奇点的又一个定理.

推论　设广义 Laguerre级数 $\sum_0^\infty a_n L_n^{(a)}(Z)$ 在其收敛抛物线 H_f 上一点 Z_0 处发散且 $a_n = 0\left(n^{\frac{a}{2}-\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{n}f}\right)$，则点 Z_0 为 $f(Z)$ 的奇点.

参考文献

1 Szász O and Yeardley N. The representation of an analytic function by general Laguerre series. Pacific J. of Math., 1958, 8: 621～633.

2 Mu Lehua. Singulartity and overconvergence of general Laguerre series. J. Math. Res. Expo., 1993, 13 (3): 359～364.

3 Szegö G. Orthogonal polynomials. Amer. Math. Colloq. Publ., 1939, 23: 193.

4 张培璇. 复变函数论. 济南: 山东大学出版社，1993.

(责任编辑: 莫鼎新　邓大玉)

世界农业科学研究的特点和趋向

世界农业科学技术发展至 90年代的今天，已不仅仅是追求单产水平，而且还向优质、高效、低投入、无污染方向发展。纵观美国、德国、英国、法国等国近年农业科学发展动态，出现了如下特点和趋向:

(1) 重视农业基础研究;

(2) 重视高、新技术的开发应用;

(3) 重视设施农业、植物工厂的发展与建设。随着各国人口的不断增加，土地资源的不断减少，以及高新技术的不断发展，人类越来越趋向于以较少的土地资源的投入、生产更多的农畜产品，以满足消费者对农畜产品质量、数量、口味以及季节等诸多方面的需求;

(4) 重视环境保护，维护生态平衡，发展环保型农业和无公害食品;

(5) 注重国际合作与交流;

(6) 重视农业情报的搜集，注重农业信息的引导、开发。