DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.02.002
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (2): 84, 92

经典 Ramsey数 $R(5, 11)$的下界
A Lower Bound of Classical Ramsey Number $R(5, 11)$

张正铀
Zhang Zhengyou
(广西区科委　南宁市新民路　530012)
(Commission of Science and Technology of Guangxi, Xinminlu, Nanning, Guangxi, 530012)

苏文龙
Su Wenlong
(广西梧州一中　梧州　543002)
(Wuzhou No. 1 Middle School of Guangxi, Wuzhou, 543002)

罗海鹏
Luo Haipeng
(广西科学院　南宁市江南路西一里 20号　530031)
(Guangxi Academy of Sciences, 20 Xiyili, Jiannanlu, Nanning, Guangxi, 530031)

摘要　研究了素数阶循环图的一些性质，得到了一个 Ramsey数新的下界：$R(5, 11) \geqslant 114$.
关键词　Ramsey数　下界　素数阶循环图

Abstract　Some characters of prime order cyclic graph were studied, and a new lower bound of Ramsey number was obtained.
Key words　Ramsey number, lower bound, prime order cyclic graph
中图法分类号　O157.5

1930年，英国科学家 F. P. Ramsey发现了一个定理[1]，揭示了“不可能有完全的无序”这深刻的自然规律而引起人们浓厚的兴趣，发展成为图论、组合数学和离散数学的核心内容—— Ramsey理论，在现代数学中产生了深远的影响，并在计算机科学、通讯工程学和决策科学等许多学科的实际问题中有着广泛的应用.

确定 Ramsey数是 Ramsey理论的核心问题，这是世界著名的数学难题. 经过各国数学家 60年的努力探索，迄今为止算出来的 Ramsey数仅有少数几个. 1990年澳大利亚的 B. D. Mckay和我国的张克民采用穷举法，借助于高速电子计算机连续运算了一个月，证明了 $R(3, 8) = 28$[2]，这是迄今已知的第 9个不平凡的 Ramsey数. 随着 Ramsey数的增大，采用这种方法的运算量将呈指数级的增长，所需要的运算时间是人们难以接受的. 因此近年来各国学者主要用各种方法借助计算机对一些具体的 Ramsey数给出估计[3]. 其中较常用的是沿用文献 [4]于 30年前倡导的方法研究一般的循环图，得到一些 Ramsey数的下界[5,8]. 但这种方法在产生参数时存在一定的随机性，运算效率不高，很难取得太大的进展. 有鉴于此，我们尝试一个新的方法[9]，研究了素数阶循环图的一些性质，利用平移、旋转和对称等手段有效地改进了产生参数的方法，提高了运算效率，得到了一个经典的 Ramsey数的新的下界.

给定素数 p，记 $Zp = \{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$为模 p 的一个剩余系，参数的集合 $E \subseteq Zp$.

定义　设图 G的顶点集 $V_G = Zp$，边集为 E. 两个顶点 x 和 y 相邻当且仅当 $\min\{|x-y|, P-|x-y|\} \in E$. 我们称图 G为 p阶循环图并记为 $G(E)$.

我们据此构造了一个 $p = 113$阶循环图，其边集

$E = \{1, 4, 6, 7, 9, 11, 16, 17, 24, 26, 28, 30, 31, 36, 42, 44, 45, 46, 49, 50, 55\}$

我们在计算机上验证了：在如前定义的 $p = 113$ 阶循环图 $G(E)$中既不含 5点团 K_5，也不含 11独立点集 $\bar{K}_{11}$. 由这个结论并据著名的 Ramsey定理，我们就证明了

定理　$R(5, 11) \geqslant 114$.

这个结论填补了文献 [3]的空白.

(下转第 92页 Continue on page 92)

1997-01-30收稿.

$\|\varphi\| = \sup_{t\in R}\|\varphi(t)\|$，则系统 (1) 至少存在一个 $a.p$ 解.

推论 1 对于数量方程

$$\dot{x} = a(t)x^3 + b(t)x^2 + c(t)x + f(t) \qquad (6)$$

设 $a(t), b(t), c(t), d(t)$ 均为连续的 a.p 函数. 记

$$\underline{\lambda} = \inf_{t\in R}|c(t)|, \quad \bar{\alpha} = \sup_{t\in R}|a(t)|,$$

$$\bar{\beta} = \sup_{t\in R}|b(t)|, \quad \bar{\delta} = \sup_{t\in R}|d(t)|.$$

当 $\bar{\alpha} > \bar{\beta}$ 时，若 $\underline{\lambda}^3 > 27(\bar{\delta} + \underline{\lambda})^2\bar{\alpha}$，

当 $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$ 时，若 $\underline{\lambda}^3 > 27(\bar{\delta} + \underline{\lambda})^2\bar{\alpha}$.

则系统 (6) 存在 a.p 解.

证明　仅需考虑 $\bar{\delta}\bar{\alpha} \neq 0$ 的情形. 当 $c(t) < 0$ 时，$\dot{x} = c(t)x$ 的解满足

$$X(t)X^{-1}(s) = \exp\int_s^t c(\tau)\,d\tau \leqslant e^{-\underline{\lambda}(t-s)}, \quad t \geqslant s$$

当 $c(t) > 0$ 时，$\dot{x} = c(t)x$ 的解满足

$$X(t)X^{-1}(s) = \exp\int_s^t c(\tau)\,d\tau \leqslant e^{-\underline{\lambda}(s-t)}, \quad t \leqslant s$$

这对应于定理 2 中的 $k = 1$，$\sigma = \underline{\lambda}$. 而

$\dot{x} = c(t)x + d(t)$ 的唯一 a.p 解

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\int_t^{\infty} d(s)\exp\int_s^t c(\tau)\,d\tau\,ds, & c(t) > 0 \\ \int_{-\infty}^t d(s)\exp\int_s^t c(\tau)\,d\tau\,ds, & c(t) < 0 \end{cases}$$

因此 $\|\varphi\| = \|d\|\cdot\dfrac{1}{\underline{\lambda}} = \dfrac{\bar{\delta}}{\underline{\lambda}}$.

$$M_1 = \max\{\sup_{t\in R}|a(t)|, \sup_{t\in R}|b(t)|\} = \begin{cases} \bar{\alpha} & (\bar{\alpha} > \bar{\beta}) \\ \bar{\beta} & (\bar{\alpha} < \bar{\beta}) \end{cases}$$

因此当 $\bar{\beta} < \bar{\alpha}$ 时，

$$\frac{KM_1}{\sigma} = \frac{\bar{\alpha}}{\underline{\lambda}} < \frac{\underline{\lambda}^2}{27(\bar{\delta} + \underline{\lambda})^2} = \frac{1}{27\left(\dfrac{\bar{\delta} + \underline{\lambda}}{\underline{\lambda}}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{27\left(1 + \dfrac{\bar{\delta}}{\underline{\lambda}}\right)^2} = \frac{1}{27(1 + \|\varphi\|)^2}$$

由定理 2，系统 (6) 存在 a.p 解 ($\bar{\beta} > \bar{\alpha}$ 的情形相仿).

由于周期函数是概周期函数的特例，因此有

推论 2 当 $A(t), B(t), C(t), f(t)$ 均是 w 周期函数时，在定理 1 的条件下，系统 (1) 存在 w 周期解.

参考文献

1 He chongyou. Almost periodic solutions of the Abel differential equation. Ann. of Diff. Eqs., 1985, 1 (1): 27~41.

2 Jiang Dongping. Almost periodic solutions of some first order differential equations. Ann. of Diff. Egs., 1986, 2 (1): 11~27.

3 何崇佑. 概周期微分方程. 北京: 高等教育出版社, 1992.

4 Fink A M. Almost periodic differential equations. Springer-verlag. 1974.

(责任编辑: 莫鼎新)

(上接第 84 页 Continue from page 84)

参考文献

1 Ramsey F P. On a Problem of formal Logic. Proc. London Math, Soc 2nd Ser, 1930, 30: 264~286.

2 Mckay B D, Zhang K M. The value of the Ramsey number R(3, 8). J Graph Theory, 1992, 16 (1): 99~105.

3 Stanislaw P R. Small Ramsey numbers. RIT-TR, 1993, 1: 2~3.

4 Graver J E, Yeckel J. Some graph theoretic results associated with Ramsey's theorem. J Comb Theory, 1968, 4: 125~175.

5 Geoffrey Exoo. A lower bound for R(5, 5). J Graph Theory, 1989, 13 (1): 97~98.

6 王清贤, 王攻本. Ramsey 数 r (3, q) 的新下界. 北京大学学报 (自然科学版), 1989, 25 (1): 117~121.

7 宋恩民, 董向锋, 许如初. 求 Ramsey 数下界的循环巧妙图搜索算法研究. 应用数学, 1995, 8 (4): 424~428.

8 谢继国, 张忠辅. 经典 Ramsey 数 R(5, 9) 和 R(5, 10) 的下界. 科学通报, 1996, 41 (20): 1918~1919.

9 Su Wenlong. The Estimation of Lower Bounds about some Ramsey Number Rn(3) and Rn(4). 广西科学, 1996, 3 (3): 4.

(责任编辑: 莫鼎新)