DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.02.001
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (2): 81~ 83

基于第二类 Chebyshev多项式导数及其伴随函数的共轭双正交级数

Conjugate Biorthogonal Series Based on the Derivatives of the Second Kind of Chebyshev Polynomials and Its Associate Function

张培璇
Zhang Peixuan

(山东大学数学系 山东济南 250100)
(Dept. of Math. Shandong Univ., Jinan, Shandong, 250100)

摘要 讨论涉及到第二类 Chebyshev多项式导数的共轭双正交级数，这里进一步讨论其共轭级数，目的是为椭圆周上的柯西型积分的主值提供新的逼近工具.
关键词 共轭双正交级数 柯西型积分主值 椭圆周

Abstract The conjugate series of the biothogonal series based on the derivatives of the second kind of Chebyshev polynomials were studied in order to give a new approximation tool for the principal value of Cauchy's type integral on an ellipse.

Key words conjugate biorthogonal series, principal value of the Cauchy's type integral, ellipse
中图法分类号 O172.2; O175.25

在 " The Biorthogonal Series based on the Derivatives of Chebyshev Polynomials of the Second kind" 一文中，笔者其于第二类 Chebyshev多项式导数，定义了一类新的双正交级数[1]，本文作为该文献工作的继续，进一步讨论其共轭级数。

用 $U_n(z)$ 表示第二类 Chebyshev多项式[2]

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \quad (1)$$

令 $H_n(z) = -k^{n+1}\{(n+1)k^2-(n+3)\}$,

$$z \in C-[-1,1] \quad (2)$$

其中 $k = z-\sqrt{z^2-1}$, C表示复平面.

文献[1]中证明在以 ± 1为焦点，长短半轴和为 d的椭圆周 ∂G_d 上，导数序列 $\{U'_{n+1}(z)\}$和其伴随函数序列 $\{H_n(z)\}$是双正交的.

椭圆 ∂G_d的方程是 $Y = ch(f+is)$, $-c \leqslant s \leqslant c$ $(e^f = d)$

令 $f(z)$ 在 ∂G_d 上是 L 可积的，定义

$$f_n = \frac{1}{2ci(n+1)(n+3)}\oint_{\partial G_d} f(Y)H_n(Y)dY$$

$$f_{-n} = \frac{1}{2ci(n+1)(n+3)}\oint_{\partial G_d} f(Y)U'_{n+1}(Y)dY$$

文献[1]中讨论了以 f_n, f_{-n}为系数的双正交级数

$$\sum_0^\infty (f_n U'_{n+1}(z) + f_{-n}H_n(z)), z \in \partial G_d$$

收敛于 $f(z)$的问题.

本文进一步讨论它的共轭级数

$$\sum_0^\infty (f_n U'_{n+1}(z) - f_{-n}H_n(z)) \quad (3)$$

和在 ∂G_d上以函数 $f(z)$为核密度的柯西型积分的主值: $(p.v)\frac{1}{2ci}\oint_{\partial G_d}\frac{f(Y)}{Y-z}dY$ $(z \in \partial G_d)$之间的关系.

按通常定义

$$(p.v)\frac{1}{2ci}\oint_{\partial G_d}\frac{f(Y)}{Y-z}dY = \lim_{W\to 0}\frac{1}{2ci}\oint_{\partial G_d - L_W}\frac{f(Y)}{Y-z}dY$$

其中 L_W表示以 $z = ch(f+i\theta)$为心的 ∂G_d上的小弧段，准确地说: L_W: $z = ch(f+is)$, $\theta - W \leqslant s \leqslant \theta + W$.

定理 若在 ∂G_d上，$f \in \mathrm{lip}T$, $0 < T \leqslant 1$，则在 ∂G_d 上，$f(z)$的共轭级数(3)的部分和 $\tilde{S}_n(f;z)$ 适合:

1997-02-18收稿。

$$\widetilde{S}_n(f;z) = 2(p.v)\frac{1}{2ci}\oint_{\partial G_d}\frac{f(Y)}{Y-z}dY + O_d\left(\frac{\ln n}{n^{T}}\right)$$

首先由(1),(2)两式易知,当 $z = ch(f + i\theta) \in \partial G_d$ 时,

$$U'_{n+1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(n+1)e^{(n+2)(f+i\theta)}}{sh^2(f+i\theta)} - \frac{e^{(n+1)(f+i\theta)}}{sh^3(f+i\theta)} + \frac{(n+1)e^{-(n+2)(f+i\theta)}}{sh^2(f+i\theta)} + \frac{e^{-(n+1)(f+i\theta)}}{sh^3(f+i\theta)}\right\} \quad (4)$$

$$H_n(z) = 2\{(n+1)e^{-(n+2)(f+i\theta)}sh(f+i\theta) + e^{-(n+1)(f+i\theta)}\} \quad (5)$$

观察(4),(5)两式,并经过直接验算可得下面等式.

引理 1 当 $z = ch(f + i\theta)$ 时,

$$U'_{n+2}(z)H_n(z) - U'_{n+1}(z)H_{n+1}(z) = 2(n+2)(n+3)$$

这个恒等式在下面的论证中起着关键的作用.

共轭级数(3)的部分和:

$$\widetilde{S}_n(f;z) = \frac{1}{2ci}\oint_{\partial G_d} f(Y)\widetilde{K}_n(z,Y)dY \quad (6)$$

其中核函数

$$\widetilde{K}_n(z,Y) = \sum_0^n \frac{1}{(k+1)(k+3)}(U'_{k+1}(z)H_k(Y) - V'_{k+1}(Y)H_k(z)) \quad (7)$$

引理 2 当 $z = ch(f + i\theta)$, $Y = ch(f + is)$ 时,

$$\sum_0^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}U'_{k+1}(Y)H_k(z) = \frac{-1}{Y-z} - \frac{ie^{i(n+\frac{5}{2})(s-\theta)}}{2\sin\frac{1}{2}(s-\theta)sh(f+is)} - L_n(s,\theta) + O(n).$$

其中 $L_n(s,\theta) = \dfrac{e^{i(n+2)(s-\theta)}(e^{f+is} + e^{-f-i\theta})}{sh^2(f+is)}$

证明 由循环公式:

$$nU'_{n+1}(z) = 2(n+1)zU'_n(z) - (n+2)U'_{n-1}(z),$$

$$nH_n(z) = 2(n+1)zH_{n-1}(z) - (n+2)H_{n-2}(z).$$

可推知

$$\sum_0^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}U'_{k+1}(Y)H_k(z) = \frac{-1}{Y-z} + \frac{U'_{n+2}(Y)H_n(z) - V'_{n+1}(Y)H_n(z)}{2(n+2)(n+3)(Y-z)}$$

$$= \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\frac{1}{Y-z}\{-2(n+2)(n+3) + U'_{n+2}(Y)H_n(z) - U'_{n+1}(Y)H_n(z)\}$$

应用引理 1,可知上式中的括号部分可改写为:

$$-U'_{n+2}(Y)H_n(Y) + U'_{n+1}(Y)H_{n+1}(Y) + U'_{n+2}(Y)H_n(z) - U'_{n+1}(Y)H_{n+1}(z)$$

从而

$$\sum_0^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}U'_{k+1}(Y)H_k(z) = \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\cdot\left\{-U'_{n+2}(Y)\frac{H_n(Y)-H_n(z)}{Y-z} + U'_{n+1}(Y)\frac{H_{n+1}(Y)-H_{n+1}(z)}{Y-z}\right\}$$

$$= \frac{1}{2(n+2)(n+3)}\cdot\{J_1 + J_2\} \quad (8)$$

经过繁琐的计算可知:

$$J_1 = -(n+1)(n+2)\frac{e^{f+i(n+3)s}}{sh(f+is)}\cdot\frac{e^{-i(n+2)s} - e^{-i(n+2)\theta}}{Y-z} - (n+1)(n+2)\cdot\frac{e^{f+is}\cdot e^{i(n+2)(s-\theta)}}{sh^2(f+is)}\mathrm{cth}\left(f + i\frac{s+\theta}{2}\right) - (n+2)\cdot\frac{e^{2f+i(n+3)s}}{sh^2(f+is)}\cdot\frac{e^{-i(n+1)s} - e^{-i(n+1)\theta}}{Y-z} + (n+1)\cdot\frac{e^{i(n+2)s}}{sh^2(f+is)}\cdot\frac{e^{-i(n+2)s} - e^{-i(n+2)\theta}}{Y-z} + O(n)$$

$$= J_{11} + J_{12} + J_{13} + J_{14} + O(n)$$

$$J_2 = (n+1)(n+2)\frac{e^{-f+i(n+2)s}}{sh(f+is)}\cdot\frac{e^{-i(n+3)s} - e^{-i(n+3)\theta}}{Y-z} + (n+1)(n+2)\frac{\mathrm{cth}\left(f + i\frac{s+\theta}{2}\right)}{sh^2(f+is)}\cdot e^{-f-i\theta}\cdot e^{i(n+2)(s-\theta)} + (n+1)\frac{e^{i(n+2)s}}{sh^2(f+is)}\cdot\frac{e^{-i(n+2)s} - e^{-i(n+2)\theta}}{Y-z} - (n+2)\frac{e^{-2f+i(n+1)s}}{sh^2(f+is)}\cdot\frac{e^{-i(n+3)s} - e^{-i(n+3)\theta}}{Y-z} + O_d(n)$$

$$= J_{21} + J_{22} + J_{23} + J_{24} + O(n)$$

通过计算并且注意到

$$Y - z = 2ish\left(f + i\frac{s+\theta}{2}\right)\sin\frac{s+\theta}{2}, \text{有}$$

$$J_{11} + J_{21} = (n+1)(n+2)\left(\frac{-2}{Y-z} + i\frac{e^{i(n+\frac{5}{2})(S-\theta)}}{\sin\frac{1}{2}(s-\theta)sh(f+is)}\right)$$

$$J_{12} + J_{22} = -\frac{(n+1)(n+2)}{sh^2(f+is)}\cdot e^{i(n+2)(S-\theta)}(e^{f+is} + e^{-f-i\theta})$$

$$(J_{14} + J_{23}) + (J_{13} + J_{24}) = -4(n+2)(1 - e^{i(n+2)(S-\theta)})\frac{1}{Y-z} + O(n)$$

由此及(8)式,引理 2得证.

定理的证明

由(7)式和引理 1可知,

$$\widetilde{K}_n(z,Y) = \frac{2}{Y-z} - \frac{i\cos(n+\frac{5}{2})(s-\theta)}{2\sin\frac{1}{2}(s-\theta)sh(f+is)} + (L_n(\theta,s) + L_n(s,\theta)) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

从而由 (6) 式 ,有

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}_n(f;z)\\
&= 2(p.v)\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G_d} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{4\pi}(p.v)\int_{-\pi}^{\pi} F(s)\\
&\frac{\cos(n+\frac{5}{2})(s-\theta)}{\sin\frac{1}{2}(s-\theta)}ds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(s)sh(\xi+is)(L_n(\theta,s)\\
&+ L_n(s,\theta))ds + O(\frac{1}{n})\\
&= B_1 + B_2 + B_3 + O(\frac{1}{n}) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

其中 $F(s) = f(ch(\xi + is))$. L_n 如引理 2所述 .

易见 $F(s)$ 以 2π 为周期且 $F\in \mathrm{lip}\,\alpha$,由 Fourier分析 [3] 知 ,项 B_2 恰为 $F(s)$ 的共轭 Fourier三角级数余和的一半 ,进而有

$$B_2 = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right)$$

再由 Fourier三角级数的系数估计可推知

$$B_3 = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

由此及 (9) 可得定理的结论 .

参考文献

1 张培璇 . The Biorthogonal Series Based on the Derivatives of Chebyshev Polynomials of the Second kind. 数学研究 , 1996, 29 (1): 29～ 33.

2 纳唐松 , 何旭初等译 . 函数构造论 (中册) . 北京: 科学出版社 , 1965.

3 河田龙夫 , 周民强译 . Fourier分析 . 北京: 高等教育出版社 , 1982.

(责任编辑: 莫鼎新)

我国空间科学实验获重要成果

我国首次在卫星上开展一定规模、分层次、系统的空间生物学效应实验，取得了一批具有科学价值和应用前景的重要成果。

1996年 10月 20日 , 我国成功地发射了科学探测和技术实验卫星。中科院空间科学与应用总体部 , 利用中科院的综合优势 , 组织了空间生命科学、材料科学和环境监测等方面的多项科学实验 , 其中有动物、植物、水生生物、微生物及细胞组织 5 个方面 33 个生物样品的空间培养、育种和机理研究。

卫星成功回收后，我国科学家经 3 个多月对空间实验的科学样品、实验数据进行分析处理等后续研究表明，我国取得了几项前所未有的突破性结果和一些有创新意义并具有实用价值的成果，概括起来有 4 个第一: 第一次完成空间高等植物萌发和幼苗生长；第一次获得微藻空间生长的种群动力学曲线；第一次获得脑细胞空间培养物；第一次完成世代昆虫空间孵化发育，获得了 Nikko霉素产率提高 10% 左右的菌株、高抗盐的固氮藻珠以及通过空间育种获得了优良食用菌种。还收集、积累和丰富了我国在 200 km～ 300 km高度上的空间重粒子辐射环境数据。此外 ,采用自动调焦的 CCD显微摄像装置和 VTR视频记录装置成功地记录了氧化物晶体材料的熔融、液流、结晶等全过程。图像清晰，记录完整，在空间微重力条件下溶体表面张力对流、结晶过程等研究上取得重大进展，达到国际先进水平。这一成果使我国空间科学实验和技术上了一个新台阶。