DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1997.01.005
广西科学 Guangxi Sciences 1997, 4 (1): 20~23

1

碎裂岩的随机分形模式
Mode of Stochastic Fractal of Chastic Rocks

李正吾　　云逢明
Li Zhengwu　　Yun Fengming
(桂林工学院　桂林市建干路 12号　541004)
(Guilin Institute of Technology, 12 Jiangan Road, Guilin, Guangxi, 541004)

摘要　提出了碎裂岩的随机分形模式，并给出了碎裂岩的量化的定义。
关键词　碎裂岩　随机分形　分数维
Abstract　In this paper the mode of stochastic fractal and quantitative definions of chastic rocks are defined.
Key words　chastic rocks, stochastic fractal, fractal dimension
中图法分类号　P588.331

碎裂岩具有复杂的粒度分布特点，因此对其研究多是定性或半定量的描述. Sammis (1987年) 将分形理论引入碎裂岩的研究中，为碎裂岩的定量化研究开辟了一条新途径. 但已有的研究在碎裂模式、分形模式上都较为简化. 本文提出碎裂岩的随机分形模式，并给出碎裂岩的量化的定义.

1　随机分数维简介

这里仅介绍随机康托集的一个特例.

设 E_0 是一个凸多边形，两条相互垂直的直线把它分成 4个部分: V_1、V_2、V_3、V_4，它们也是凸多边形，且按一定顺序排列. 记

$$C_i = |V_i| / |E_0| \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

其中 $|V_i|$、$|E_0|$ 分别表示集合 V_i、E_0 的直径，亦即集合中两点之距离的最大者. 比值 $C_i, i = 1, 2, 3, 4$ 是随机变量: $0 \leqslant C_i \leqslant 1$. C_1、C_2、C_3、C_4 不是相互独立的，但在以下过程中假定其相互独立. 我们从 V_1、V_2、V_3、V_4 中选取一部分作 E_1: 每个 V_i 以概率 p 独立地被选中. 设被选中的 V_i 的个数为 N，N 也是随机变量.

设 V_{i_1} 被选中，用两垂直直线把 V_{i_1} 分成 4个小部分: 记 $V_{i_1 1}$、$V_{i_1 2}$、$V_{i_1 3}$、$V_{i_1 4}$. 记

$$C_{i_1 j} = |V_{i_1 j}| / |V_{i_1}| \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$C_{i_1 j}$ 是一个随机变量: $0 \leqslant C_{i_1 j} \leqslant 1$，且 $C_{i_1 1}$、$C_{i_1 2}$、$C_{i_1 3}$、$C_{i_1 4}$ 不一定相互独立，但 $C_{i_1 j}$ 与 C_j 有相同的分布. 显然我们可以把 E_1 看作是若干个凸多边形 $V_{i_1 j}$ 之并集. 类似地从 E_1 的 $V_{i_1 j}$ 中选出一部分作集 E_2, … ，如此，我们得到一个递减的集合序列: $E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$

记 $F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$. 关于集合 F 有以下结论[4].

1. 设 $t = q$ 是下面关于 t 的方程的最小非负根:

$$(pt + 1 - p)^4 = t \tag{2}$$

则 F 为空集的概率是 q.

2. F 的盒维数是 S 的概率是 $1 - q$，其中 S 由下面的方程给出

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} C_{i_k}^{S}\right) = 1 \tag{3}$$

其中 C_{i_k} 由式 (1) 确定，而 V_{i_k} 是 V_1、V_2、V_3、V_4 中被选作 E_1 的 N 个中之一个.

记 $g(t) = (pt + 1 - p)^4 - t$. 因为 $g''(t) \geqslant 0$，所以 $g(t)$ 的唯一驻点 t_0

$$t_0 = \left(\sqrt[3]{1/4p} - 1 + p\right)/p$$

是 $g(t)$ 的最小值点: $g(t_0)$ 是 $g(t)$ 的最小值.

当 $p \leqslant \frac{1}{4}$ 时，$t_0 \geqslant 1$，不难导出这时方程 (2) 的最小非负根 $q = 1$. 亦即 $p \leqslant \frac{1}{4}$ 时，F 是空集的概率为 1.

1996-07-31收稿，1997-01-14修回。

当 $p > \frac{1}{4}$时,这时 $t_0 < 1$,且 $g(t_0) < 0, g(0) \geqslant 0$,所以方程(2)的最小非负根 q满足: $0 \leqslant q < t_0 < 1$. 则 F为空集的概率是 q, $0 \leqslant q < 1$.

下面讨论 F的维数 S.

假定 $C_i, i = 1, 2, 3, 4$在区间(0, 1)上服从均匀分布.因为 N是 V_1、V_2、V_3、V_4被选作 E_1的个数,而每个 V_i被选中的概率是 p,所以 $E(N) = 4p$ (N的数学期望是 $4p$),于是

$$E(\sum_{k=1}^{N} C_{i_k}^{S}) = 4p(\frac{1}{2})^S$$

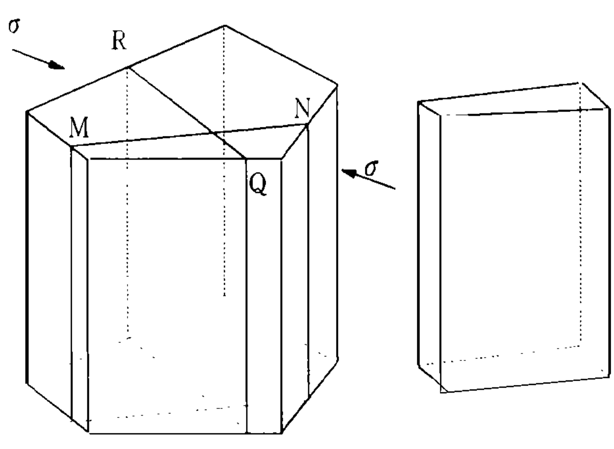
由式(3)得到

$$S = \frac{\ln 4p}{\ln 2} \tag{4}$$

S是集 F的维数.显然式(4)是在 $p > \frac{1}{4}$的条件下才有意义.

2 岩石分形碎裂模式

一个岩石单元受力而破裂, 由于应力集中的原因,裂成凸多面体的可能性远大于其它破裂情况. 所以我们把岩石单元看成底面是凸多边形的柱体,且底面平行于最大主应力和最小主应力所确定的平面.在应力的作用下,将有两个相互共轭的断裂方向,这两个方向近似垂直. 于是一个单元裂成 4块, 每一块成为一个小长条 (见图 1). 由于不同层面应力的差异,受剪切力的作用,可以认为这些小长条以概率 1断成两段. 这样一个岩石单元碎裂后分成上下两层. 上层的 4块中部分是易碎体, 每个易碎体碎裂成 4块. 下层的 4块同样只有部分是易碎体;每个易碎体也将裂成 4块.



(a) (b)

图 1 碎裂模式

Fig. 1 The mode of deformation

(a) 岩石单元是一个柱体, MN与 RQ是两个共轭的断裂方向; (b) 4个小长条之一.

(a) The rock unit is a column, MN & RQ are two conjugate fracture direction; (b) One of four small long column.

如上分析,岩石分形碎裂模式可以用两个第一段所说的随机康托集给出. 由第一段的结论有:

当 $p \leqslant \frac{1}{4}$时,一个岩石单元碎裂分形以概率 1成为空集.

当 $p > \frac{1}{4}$时,每个康托集成为空集的概率是 q,非空的概率是 $1 - q$.只有当两个康托集都是空集时,一个岩石单元碎裂分形才是空集.故碎裂分形以概率 q^2成为空集,q是方程(2)的最小非负根.碎裂分形非空的概率是 $1 - q^2$.两个康托集至少有一个非空,碎裂分形才是非空的.两个康托集只有一个非空的概率是 $2(1 - q)q$,两个康托集同时非空的概率是 $(1 - q)^2$:

$$1 - q^2 = 2(1 - q)q + (1 - q)^2$$

两个康托集只有一个非空时,由式(4)得碎裂分形的维数 S

$$S = \frac{\ln 4p}{\ln 2}$$

两个康托集同时非空时, 由碎裂模式分析可知,碎裂分形是一个康托集往第 3维扩展,所以这时分形的维数 S

$$S = \frac{\ln 4p}{\ln 2} + 1$$

综上所述,碎裂分形的维数 S是一个随机变量,它的数学期望

$$ES = (1 - q)^2[\frac{\ln 4p}{\ln 2} + 1] + 2(1 - q)q\frac{\ln 4p}{\ln 2} + q^2 \cdot 0$$

表 1列出了 P值从 0.00~ 1.00与之对应的 q值

3 碎裂岩的分数维

上一段给出了一个岩石单元碎裂分形的维数.由概率论的大数定律,整个碎裂岩的分数维应该是所有岩石单元的维数的均值(数学期望值).

对于确定的 $p(> \frac{1}{4})$,设这时一个岩石单元碎裂分形为空集的概率为 q.由第二段的结论,碎裂岩分数维 S:

$$S = (\frac{\ln 4p}{\ln 2} + 1)(1 - q)^2 + \frac{\ln 4p}{\ln 2} \cdot 2(1 - q)q \tag{5}$$

表 1　分形为空集的概率 **q** 值

Table 1　The q-value that is probability of fractal became empty set

p 值 p -value	q 值 q -value
≤ 0.25	1.000
0.27	0.811
0.29	0.661
0.31	0.542
0.33	0.446
0.35	0.368
0.37	0.304
0.39	0.251
0.41	0.208
0.43	0.172
0.45	0.142
0.47	0.117
0.49	0.096
0.51	0.079
0.53	0.065
0.55	0.053
0.57	0.043
0.59	0.034
0.61	0.027
0.65	0.017
0.67	0.013
0.69	0.010
0.71	0.008
0.73	0.006
0.75	0.004
0.77	0.003
0.79	0.002
0.81	0.001
0.83	0.001
0.85	0.001
≥ 0.87	0.000

表 2列出了与 p 值对应的 S 值.当 $p \leqslant 0.37$ 时, S 不足 1;当 $p \leqslant 0.54$ 时, S 不足 2.

从表 2可见,当 $p = 0.75$ 时,维数 $S = 2.577$,这与文献 [1]、[3]的结论是一致的.

4　碎裂岩维数测定方法

设一个岩石单元经过 n 次碎裂后的几何体的粒径为 $L_{(n)}$,这种子几何体的个数为 $N_{(n)}$. $L_{(n)}$ 就是第一段说的 $V_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 之直径 $|V_{i_1 \cdots i_n}|$ ($V_{i_1 \cdots i_n}$ 是 $V_{i_1 \cdots i_{n-1}}$ 碎裂后得到的 4个小块中的一块).由于

$$C_{i_1 i_2 \cdots i_n} = |V_{i_1 \cdots i_n}| / |V_{i_1 \cdots i_{n-1}}|$$

表 2　碎裂岩分数维 **s** 值

Table 2　The s-value that is fractal dimension of chastic rocks

p 值 p -value	s 值 s -value
≤ 0.25	0.000
0.26～ 0.37	0.000～ 1.000
0.38～ 0.54	1.000～ 2.000
0.55	2.031
0.57	2.103
0.59	2.171
0.61	2.233
0.63	2.289
0.65	2.344
0.67	2.396
0.69	2.445
0.71	2.490
0.73	2.534
0.75	2.577
0.77	2.617
0.79	2.656
0.81	2.694
0.83	2.729
0.85	2.764
0.87	2.799
0.89	2.832
0.91	2.864
0.93	2.900
0.95	2.926
0.97	2.956
0.99	2.986

所以 $L_{(n)} = C_{i_1 \cdots i_n} \cdot L_{n-1}$

而 $C_{i_1 \cdots i_n}$ 与 C_{i_n} 同分布, C_n 服从均匀分布,因此

$$E(L_{(n)}) = \frac{1}{2} E(L_{(n-1)}) \tag{6}$$

记 E_n (见第一段)中有 $N^{(n)}$ 个 $V_{i_1 \cdots i_n}$,其中 $N_1^{(n)}$ 个是易碎体,将作第 $n+1$ 次碎裂,或者说将被选作 E_{n+1} 的子块.于是

$$N_{(n)} = (N^{(n)} - N_1^{(n)}) \times 2 \tag{7}$$

由于假定每一个子块碎裂的概率是 p,所以

$$E(N_1^{(n)}) = p \cdot E(N^{(n)}) \tag{8}$$

故

$$\begin{aligned} E(N_{(n)}) &= 2[E(N^{(n)}) - E(N_1^{(n)})] \\ &= 2[E(N^{(n)}) - p \cdot E(N^{(n)})] \\ &= 2(1-p)E(N^{(n)}) \end{aligned}$$

所以

$$E(N_{(n)})/E(N_{(n-1)}) = E(N^{(n)})/E(N^{(n-1)})$$

由于 $N^{(n-1)}$ 是 $E_{(n-1)}$ 中子块的个数,其每一个子块被选作 E_n 的概率是 p.每个被选作 E_n 的子块又被分成 4 小块,所以

$$E(N^{(n)}) = 4P\,E(N^{(n-1)})$$

这样

$$E(N^{(n)})/E(N^{(n-1)}) = 4P \tag{9}$$

文章 [3] 中介绍的测量碎裂岩粒度分布的方法: Sammis法、图象分析和筛选法,都是处理大量岩石单元碎裂后的粒度分布.这时测量的结果等于一个单元碎裂后粒度分布的期望值.式(9)表示相邻粒度的颗粒密度之比是 $4p$.第 n 级颗粒密度不妨也用 $N_{(n)}$ 表示,于是有

$$\frac{\ln 4p}{\ln 2} = \frac{\ln(N_{(n)}/N_{(n-1)})}{\ln 2} \tag{10}$$

将(10)代入式(5),即可求出碎裂岩维数.

5 结论

我们认为碎裂岩应该有一个量化的定义.这显然要从分形维数考虑.平面的维数是 2.因此应该把碎裂岩和非碎裂岩的维数分界定为 2 分数维 $S>2$ 时,是碎裂岩.由表 2可知,这时应有 $p\geqslant 0.55$.据式(10)得

$$N_{(n)}/N_{(n-1)} = 4p \geqslant 4\times 0.55 \approx 2 \tag{11}$$

式(11)就是碎裂岩的定义.它指出当粒径比为 1/2的两种颗粒(亦即相邻粒度的两种颗粒)之颗粒密度比超过 2时,才能视为碎裂岩.

碎裂岩的分数维由 p 值唯一确定.p 是岩石单元碎裂的概率,与碎裂岩形成的地质条件(如温度、压力、应变量、岩性等)有关.所以 p 比分维数 S 直观易理解.我们把 p 定义为分维参数.由式(10)可知: 两种粒径不同颗粒,如果它们粒径的比为 1/2,则它们的颗粒密度之比的四分之一就是分维参数 p.

测出分维参数 p 后,由表 2可查出分维值 S.

显然,我们不接受 Sammis[1]把碎裂岩的分数维视为常量的观点.

参考文献

1 Sammis C G, King G, Biegel R. The kinematics of gouge deformation. Pure and Applied Geophysics, 1987, 125: 777~ 812.

2 Turcotte D L, Fractals and fragmentation. Journal of Geophysical Research, 1986, 91: 1921~ 1926.

3 赵中岩, 王 毅. 碎裂岩的分数维分析: 理论、方法及地质意义. 地质科学, 1992, (3): 282~ 290.

4 肯尼思德尔科内. 分形几何—— 数学基础及其应用. 曾文曲等译. 东北工学院出版社, 1991, 301~ 316.

(责任编辑: 莫鼎新 邓大玉)

我国学术期刊文献步入电子化轨道

由清华大学主办,光盘国家工程研究中心和北京清华信息系统工程公司联合编辑制作的我国第一部大规模集成化的学术期刊全文电子检索系统《中国学术期刊(光盘版)》是集成我国自然科学、工程技术、人文社会科学核心期刊和专业特色期刊现刊全文的大型全文电子检索系统,与所含各刊基本上同步出版,并配备了具有国际先进水平的全文检索管理软件。该系统与印刷版期刊相配合,既是国内外科技工作者进行学术交流查阅文献资料的一个全文快速导读检索服务系统,也是期刊、文献评价的一个统计系统。该系统主要面向全国大专院校、科研学术单位及各级图书情报部门。