DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.04.020
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (4): 61~ 64

二参数广义正则随机事件流
Two-parameter Generalized Regular Random Event Flows

方世祖
Fang Shizu

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘东路 10号 530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 给出二参数广义正则随机事件流的定义,讨论它的基本性质,给出二参数广义正则可加随机事件流的母函数的一般形式。

关键词 二参数随机事件流 概率分布 母函数 广义连续 可加过程 Lévy过程

Abstract A two-parameter generalized regular random event flow was defined. Some elementary properties of two-parameter generalized regular random event flows were discussed. It is presented that a general form of generating functions of two-parameter generalized regular additive flows.

Key words two-parameter random event flows, probability distributions, generating functions, continuity in the extended sense, additive processes, Lévy processes

设 (Ω, F, P) 是完备的概率空间,$R_+^2 = \{(s,t): s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$,$X = \{X(Z): Z \in R_+^2\}$ 为 (Ω, F, P) 上的以 $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 为状态空间的二参数随机过程。本文未定义的符号和术语见文献[1~ 5]。文中述及二参数流或流均指二参数随机事件流,下面的 X 均表示二参数随机事件流。

文献[2]给出了二参数正则随机事件流的定义,讨论了它的基本性质,并用不同于 Adler R. J.得到相应结果[7]的方法给出了二参数正则可加流的母函数的一般形式。

本文定义并研究二参数广义正则随机事件流,主要是给出二参数广义正则可加流的母函数的一般形式,从而为进一步讨论二参数有限流的一般形式这一困难的问题打下坚实的基础。另外,一般来说,二参数广义正则可加流不是随机连续的,当然它就不是一个 Lévy 过程[6],因此本文的主要结果不包含于 Adler R. J.得到的结果[7]当中。

1 定义

对任意的 $Z_1, Z_2 \in R_+^2$,当 $Z_1 < Z_2$ 时,定义在 R_+^2 上的二元实函数 $f(Z)$ 在正位矩形 $(Z_1, Z_2]$ 上的增量为

$$f(Z_1, Z_2] = f(Z_2) - f(Z_1 \otimes Z_2) - f(Z_2 \otimes Z_1) + f(Z_1)$$

一般,对任意的 $Z', Z'' \in R_+^2$,如 Z', Z'' 能构成某正位矩形的对角顶点,则该正位矩形记为 $I_{Z', Z''}$,$f(Z)$ 在 $I_{Z', Z''}$ 上的增量记为 $f(I_{Z', Z''})$。如果对任意的 $Z_1 \leqslant Z_2$ 有 $f(Z_1) \leqslant f(Z_2)$(或 $f(Z_1) \geqslant f(Z_2)$),则称 $f(Z)$ 为单增(或单减)函数;如果对任意的 $Z_1 < Z_2$ 有 $f(Z_1, Z_2] \geqslant 0$,则称 $f(Z)$ 为矩形增函数;如果 $f(Z)$ 既是单增函数又是矩形增函数,则称 $f(Z)$ 是双增函数。单增函数和矩形增函数是两个本质上不同的概念,互不蕴含。

定义 1 设 $Z = (s,t) \in R_+^2$,又 $f(Z) = f(s,t)$ 是定义在 R_+^2 上的二元实值函数。对某 $Z_0 = (s_0, t_0) \in R_+^2$,如果对 $h > 0, g > 0$,有

$$\lim_{h \to 0, g \to 0} f((s_0 - h, t_0 - g), (s_0 + h, t_0 + g)] = 0$$

则称二元函数 $f(s,t) = f(Z)$ 于 (s_0, t_0) 点在矩形增量意义下是广义连续的,在下文中均简称为 $f(Z)$ 于 (s_0, t_0) 点广义连续。如果 $f(Z)$ 在某个区域 $D(D \subset R_+^2)$ 中每一点都广义连续,则称 $f(Z)$ 是 D 上的广义

1995-10-08收稿。

连续函数.

易见如 $f(Z)$ 于 Z_0 点连续,则 $f(Z)$ 于 Z_0 点广义连续,反之则不然.例如设

$$f(s,t)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant s\leqslant 1, t\geqslant 0\text{时};\\ 1, & \text{当 } s>1, t\geqslant 0\text{时}.\end{cases}$$

则 $f(s,t)$ 是 R_+^2 上的广义连续函数,但它不是 R_+^2 上的连续函数.

定义 **2** 如果二参数随机事件流 X 的主导函数 $\Lambda(s,t)$ 是 R_+^2 上的广义连续函数,则称 X 为二参数广义正则随机事件流,或称流 X 为广义正则的.

易见二参数正则流必是广义正则的.

定义 **3** 设 $f(Z)$ 是定义在区域 D 上的二元实函数,如果对任给的 $X>0$,总可以找到仅与 X 有关的 $W>0$,使对任意的 $Z', Z''\in D$,当 $|Z'-Z''|<W$ 时,都有 $|f(I_{Z',Z''})|<X$ 则称 $f(Z)$ 在 D 上一致地广义连续.

2 二参数广义正则随机事件流的基本性质

对任意 $Z_i=(s_i,t_i)\in R_+^2\ (i=1,2)$,当 $Z_1<Z_2$ 时,流 X 在区域 $(Z_1,Z_2]=(s_1,s_2]\times(t_1,t_2]$ 中出现 k 件事件的概率记为 $\tilde{V}_k(Z_1,Z_2)$ 或 $\tilde{V}_k(s_1,s_2;t_1,t_2)\ (k=0,1,2,\cdots)$.

由文献 [2] 知 $p_k(s,t)=\lim\limits_{h\to 0+,\,g\to 0+}\tilde{V}_k(s-h,s+h;t-g,t+g)$ 存在且 $0\leqslant p_k(s,t)\leqslant 1\ (k=0,1,2,\cdots)$.

定理 **1** 二参数有限流 X 是广义正则的充分必要条件是:对任意 $(s,t)\in R_+^2$ 有 $p_0(s,t)=1$.

证明 设流 X 是广义正则的,即 X 的主导函数 $\Lambda(s,t)$ 是广义连续函数,故

$$0\leqslant 1-\tilde{V}_0(s-h,s+h;t-g,t+g)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}k\tilde{V}_k(s-h,s+h;t-g,t+g)=\Lambda(s+h,t+g)-\Lambda(s-h,t+g)-\Lambda(s+h,t-g)+\Lambda(s-h,t-g)$$

由此得 $p_0(s,t)=1$.必要性证得.

充分性 无妨设 $(s,t)>(0,0)$, $p_0(s,t)=1$,则有

$$\Lambda(s+h,t+g)-\Lambda(s-h,t+g)-\Lambda(s+h,t-g)+\Lambda(s-h,t-g)=\sum_{k=1}^{\infty}k\tilde{V}_k(s-h,s+h;t-g,t+g)=\sum_{k=1}^{m}j_k(s-h,s+h;t-g,t+g)+\sum_{k>m}j_k(s-h,s+h;t-g,t+g)$$

记上面和式中第一项为 $Q_m(h,g)$,第二项为 $R_m(h,g)$,对任给的 $X>0$,固定 h_0 及 g_0,使 $0<h_0<s$, $0<g_0<t$,并取定足够大的 m 使 $R_m(h_0,g_0)<X$,故当 $(h,g)\leqslant(h_0,g_0)$ 时有 $R_m(h,g)<X$,又

$$Q_m(h,g)\leqslant m\,j_1(s-h,s+h;t-g,t+g)=m[1-\tilde{V}_0(s-h,s+h;t-g,t+g)]$$

由 $p_0(s,t)=1$ 知当 h,g 充分小时有 $Q_m(h,g)<X$.于是 $\Lambda(s,t)$ 于 (s,t) 点广义连续.又当 (s,t) 点是 R_+^2 的边界点时,类似可证 $\Lambda(s,t)$ 在 (s,t) 点广义连续.由 $(s,t)\in R_+^2$ 的任意性知流 X 是广义正则的.证毕.

定理 **2** 二参数广义正则流 X 的主导函数 $\Lambda(Z)$ 在任意有界闭域 $D\,(D\subset R_+^2)$ 上一致地广义连续.

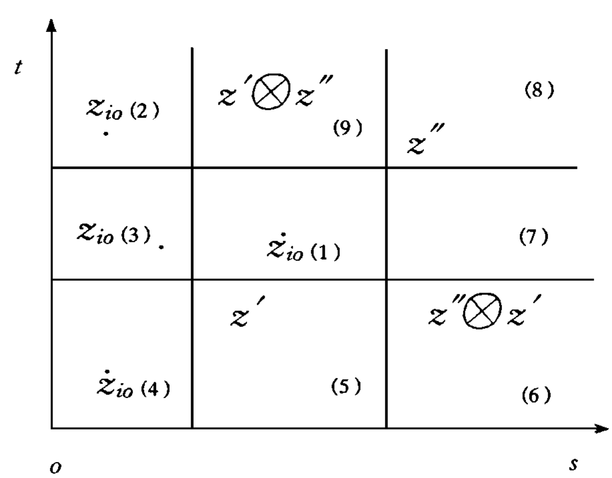
证明 任给 $X>0$,对任何 $Z\in D$, $\Lambda(Z)$ 在 Z 点广义连续,故有 $W_Z>0$ 使 $y\in D$ 且 $|y-Z|<2W_Z$ 时,就有 $|\Lambda(I_{y,Z})|<X/4$

设所有开圆 $U_Z=\{y:|y-Z|<W_Z\}\,(Z\in D)$ 构成的开圆族为 M,它完全覆盖了区域 D.由有限覆盖定理知有 M 中的有限个开圆 $U_{Z_1},U_{Z_2},\cdots,U_{Z_m}$ 便已完全覆盖了 D,令 $W=\min\{W_{Z_1},W_{Z_2},\cdots,W_{Z_m}\}$,则对 D 中任何满足 $|Z'-Z''|<W$ 的 Z',Z'' 而言, Z' 必在某个 $U_{Z_{i_0}}\ (i_0=1,2,\cdots,m)$ 中,故

$$|Z'-Z_{i_0}|<W_{Z_{i_0}}<2W_{Z_{i_0}}$$

$$|Z''-Z_{i_0}|\leqslant|Z''-Z'|+|Z'-Z_{i_0}|<2W_{Z_{i_0}}$$

如下图所示,正位矩形 $I_{Z',Z''}$ 及其边界延长线至多将 R_+^2 分为 9 块, Z_0 都可能位于其中的某一块,即 Z_0 与 Z',Z'' 的位置关系可能有 9 种.再注意到 Z_{i_0} 的



定义及 X 的主导函数 $\Lambda(Z)$ 的性质,有

情形 **1** $|Z'\otimes Z''-Z_{i_0}|<W<2W_{Z_{i_0}}$,

$|Z''\otimes Z'-Z_{i_0}|<W$

故有 $|\Lambda(I_{Z',Z''})|\leqslant|\Lambda(I_{Z',Z_{i_0}})|+|\Lambda(I_{Z_{i_0},Z''})|+|\Lambda(I_{Z'\otimes Z'',Z_{i_0}})|+|\Lambda(I_{Z''\otimes Z',Z_{i_0}})|<X$

情形 2 $|Z_{i_0} - Z''\otimes Z'| \leqslant |Z_0 - Z'| + |Z' - Z''\otimes Z'| < W_{z_{i_0}} + W < 2W_{z_{i_0}}$.

故有 $|\Lambda(I_{Z',Z''})| \leqslant |\Lambda(I_{Z_{i_0},Z''\otimes Z'})| < X/4$

情形 3 $|Z_0 - Z''\otimes Z'| < 2W_{z_{i_0}}$

故有 $|\Lambda(I_{Z',Z''})| \leqslant |\Lambda(I_{Z_{i_0},Z''})| + |\Lambda(I_{Z_{i_0},Z''\otimes Z'})| < X/4 + X/4 = X/2$

情形 4 有 $|\Lambda(I_{Z',Z''})| \leqslant |\Lambda(I_{Z_{i_0},Z''})| < X/4$

其余情形类似地证明,总之有 $|\Lambda(I_{Z',Z''})| < X$ 而 W 与 Z', Z'' 无关,故 $\Lambda(Z)$ 在闭域 D 上一致地广义连续. 证毕。

定理 3 若流 X 是广义正则的, $0 < Z_1 < Z_2$, $Z = (s,t)$, 则在 $Z_1 \leqslant Z \leqslant Z_2$ 上一致地有

$$\lim_{h\to 0,\, g\to 0} \mathcal{V}_0(s-h, s+h; t-g, t+g) = 1$$

证明 $0 \leqslant 1 - \mathcal{V}_0(s-h, s+h; t-g, t+g) \leqslant \Lambda((s-h, t-g), (s+h, t+g)]$

由于 $\Lambda(s,t)$ 在任意有界闭域上一致地广义连续,立即得到结论. 证毕。

定理 4 若流 X 是广义正则可加的,则对任意的 $Z_i = (s_i,t_i) \in R_+^2$ $(i = 1, 2)$,当 $Z_1 < Z_2$ 时,必有 $\mathcal{V}_0(Z_1,Z_2) > 0$.

证明 仿文献[2]定理 3.5的证明可推得. 证毕。

3 二参数广义正则可加流的一般形式

当 $Z_1, Z_2 \in R_+^2$ 且 $Z_1 < Z_2$ 时,已知流 X 的母函数为 $H(x; Z_1, Z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{V}_k(Z_1, Z_2)x^k$. 若流 X 广义正则可加,则 $\mathcal{V}_0(Z_1,Z_2) > 0$. 故 $\ln H(x; Z_1, Z_2)$ 有展开式

$$\ln H(x; Z_1, Z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(Z_1, Z_2)x^k \qquad (1)$$

它在 $x = 0$ 的某邻域上收敛。

由文献[2]知在 $x = 0$ 的某邻域上,有

$$\ln H(x; Z_1, Z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} i_k(Z_1, Z_2]x^k \qquad (2)$$

这里 $i_k(Z_1, Z_2] \equiv i_k(Z_2) - i_k(Z_2\otimes Z_1) - i_k(Z_1\otimes Z_2) + i_k(Z_1)$ 而对任意 $Z \in R_+^2$, $i_k(Z) \equiv W_k(0, Z)$.

定理 5 设 X 为广义正则可加流, $n \geqslant 1$, $0 \leqslant Z_1 < Z_2$, $Z_i = (s_i, t_i)$ $(i = 1, 2)$,又设

$s_1 = s^0 < s^1 < \cdots < s^i = s_2$, $t_1 = t^0 < t^1 < \cdots < t^j = t_2$

$$d(i,j) = \max_{1\leqslant r\leqslant i,\, 1\leqslant p\leqslant j}\{(s^r - s^{r-1}), (t^p - t^{p-1})\}$$

则对(2)式中的系数 $i_n(Z_1, Z_2]$ 有

$$i_n(Z_1, Z_2] = \lim_{d(i,j)\to 0} \sum_{r=1}^{i} \sum_{p=1}^{j} \mathcal{V}_n(s^{r-1}, s^r; t^{p-1}, t^p) / \mathcal{V}_0(s^{r-1}, s^r; t^{p-1}, t^p) \qquad (3)$$

证明 利用定理 3的结果仿文献[2]定理 3.6的证明可推得. 证毕。

定理 6 若流 X 是广义正则可加的,则它的母函数 $H(x; Z_1, Z_2)$ 具有形式

$$H(x; Z_1, Z_2) = \exp\{\sum_{k=0}^{\infty}[i_k(Z_2) - i_k(Z_2\otimes Z_1) - i_k(Z_1\otimes Z_2) + i_k(Z_1)]x^k\} = \exp\{\sum_{k=0}^{\infty} i_k(Z_1, Z_2]x^k\} \qquad (4)$$

其中函数 $i_k(Z)$ $(Z \in R_+^2)$ 满足

(a) 对任意 $Z \in R_+^2$, $\sum_{k=0}^{\infty} k\, i_k(Z)$ 均收敛;

(b) 对任意 $Z \in R_+^2$, $\sum_{k=0}^{\infty} i_k(Z) = 0$;

(c) 对任意 $k \geqslant 1$,若 $0 \leqslant Z_1 \leqslant Z_2$,则有 $i_k(Z_1, Z_2] \geqslant 0$, $i_0(Z)$ 是单减函数, $i_k(Z)$ $(k \geqslant 1)$ 都是单增函数;

(d) 每个 $i_k(Z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 都是 R_+^2 上的广义连续函数.

反过来,如给定形如(4)式的函数 $H(x; Z_1, Z_2)$ 其中的函数 $i_k(Z)$ $(Z \in R_+^2)$ 满足条件(a)~(d),则必存在一个广义正则可加流 X,其母函数就是 $H(x; Z_1, Z_2)$.

证明 设流 X 是广义正则可加的,则由以上的推导知流 X 的母函数具有形式(4),今证其中函数 $i_k(Z)$ $(Z \in R_+^2)$ 满足条件(a)~(d).

函数 $i_k(Z)$ $(Z \in R_+^2)$ 满足(a)~(c)仿文献[2]可证,下面证明它满足条件(d).

对 $m \geqslant 1$,任意固定 $(s_0, t_0) \in R_+^2$,无妨设 $(s_0, t_0) > (0, 0)$,往证 $i_m(Z)$ 于 (s_0, t_0) 点广义连续. 由(a)的证明(参见文献[2])知:对 $0 < h \leqslant s_0$, $0 < g \leqslant t_0$ 有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant i_m((s_0 - h, t_0 - g), \\ &(s_0 + h, t_0 + g)] \leqslant \Lambda((s_0 - h, t_0 - g), \\ &(s_0 + h, t_0 + g)] \leqslant \Lambda((0, 0), \\ &(2s_0, 2t_0)] < \infty \end{aligned}$$

故如果 $i_m(Z)$ 于 (s_0, t_0) 点不是广义连续的,则必有两个数列 $\{h_k\}, \{g_k\}$,它们满足: $0 < h_k < s_0$, $0 < g_k < t_0$,且 $h_k \to 0$, $g_k \to 0$ $(k \to \infty)$ 使

$$i_m((s_0 - h_k, t_0 - g_k), (s_0 + h_k, t_0 + g_k)] \to X_0 \quad (k \to \infty)$$

这里 X_0 为某个正常数。故必有 N,使当 $k > N$ 时有

$$i_m((s_0 - h_k, t_0 - g_k), (s_0 + h_k, t_0 + g_k)] \geqslant X_0/2$$

记 $Z_k^1 = (s_0 - h_k, t_0 - g_k), Z_k^2 = (s_0 + h_k, t_0 + g_k)$,则有

$$i_0(Z_k^1, Z_k^2] = -\sum_{n=1}^{\infty} i_n(Z_k^1, Z_k^2] \leqslant - i_m(Z_k^1, Z_k^2]$$

$$\leqslant -\frac{X_0}{2}$$

但 $i_0(Z_k^1, Z_k^2] = \ln H(0; Z_k^1, Z_k^2) \leqslant -\frac{X_0}{2}$

故

$$\mathcal{V}_0(s_0 - h_k, s_0 + h_k; t_0 - g_k, t_0 + g_k) =$$

$$H(0; Z_k^1, Z_k^2) \leqslant e^{-\frac{X_0}{2}}$$

令 $k \to \infty$ 得 $p_0(s_0, t_0) \leqslant e^{-\frac{X_0}{2}} < 1$

这与流 X 为广义正则的矛盾。由以上证明知道 $i_0(Z)$ 也是 R_+^2 上的广义连续函数。

现在证明定理的第二部分。

由文献 [2] 知存在可加流 L_k,使得流 L_k 在区域 $(Z_1, Z_2]$ 中出现 m 件事件的概率 $\mathcal{V}_m^{(k)}(Z_1, Z_2)$ 为

$$\mathcal{V}_m^{(k)}(Z_1, Z_2) = \begin{cases} e^{-i_k(Z_1, Z_2]} \dfrac{(i_k(Z_1, Z_2])^r}{r!}, & m = kr \\ 0, & m \not\equiv 0, \bmod k \end{cases}$$

于是流 L_k 的母函数为

$$H_k(x; Z_1, Z_2) = e^{(x^k - 1) i_k(Z_1, Z_2]}$$

还可假定各个流 L_i $(i = 1, 2, \cdots)$ 为相互独立的。设各 $L_1, L_2, \cdots, L_n, \cdots$ 迭加所生出的流为 L,则 L 是可加流。由条件 (b) 知流 L 的母函数为

$$F(x; Z_1, Z_2) = \prod_{k=1}^{\infty} H_k(x; Z_1, Z_2) =$$

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty}(x^k - 1) i_k(Z_1, Z_2]} = e^{\sum_{k=0}^{\infty} i_k(Z_1, Z_2] x_k} = H(x; Z_1, Z_2)$$

可见已知函数 $H(x; Z_1, Z_2)$ 的确是可加流 L 的母函数,再证流 L 是广义正则的即可。

对任给的 $X > 0$,和 $Z = (s, t) > (0, 0)$,由条件 (a) 知存在 $N > 0$,使得

$$\sum_{k > N} k\, i_k(Z) < X \tag{5}$$

流 L_k 的主导函数为 $k\, i_k(Z)$,由条件 (d) 知流 L_k 是广义正则的,于是对任意固定的点 $Z_0 = (s_0, t_0) \in R_+^2$, $(0, 0) < Z_0 < Z$,由定理 3,存在 $W_1, W_2 > 0$,使当 $0 < h < W_1$, $0 < g < W_2$ 时有

$$\sum_{k=1}^{N} [1 - \mathcal{V}_0^{(k)}(s_0 - h, s_0 + h; t_0 - g, t_0 + g)] < X \tag{6}$$

由于对任意的 $0 \leqslant Z_1 < Z_2$ 有

$$1 - \mathcal{V}_0^{(k)}(Z_1, Z_2) = \sum_{p=1}^{\infty} \mathcal{V}_p^{(k)}(Z_1, Z_2) \leqslant k\, i_k(Z_1, Z_2] \tag{7}$$

从而由 (5)~(7) 式,只要 $0 < h < W_1$, $0 < g < W_2$, $(s_0 + h, t_0 + g) < Z$

就有

$$1 - \mathcal{V}_0(s_0 - h, s_0 + h; t_0 - g, t_0 + g) \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [1 - \mathcal{V}_0^{(k)}(s_0 - h, s_0 + h; t_0 - g, t_0 + g)] \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{N} [1 - \mathcal{V}_0^{(k)}(s_0 - h, s_0 + h; t_0 - g, t_0 + g)] +$$

$$\sum_{k > N} [1 - \mathcal{V}_0^{(k)}(0, s; 0, t)] < X + \sum_{k > N} k\, i_k(Z) < 2X$$

故 $p_0(s_0, t_0) = 1$,由 Z_0, Z 的任意性知流 L 是广义正则的。证毕。

注 设二参数广义正则可加流 X 是零初值的[3],对 $Z, Z' \in R_+^2$,有 $E|X_{Z'} - X_Z| \geqslant |EX_{Z'} - EX_Z| = |\Lambda(Z') - \Lambda(Z)|$ 由于 $\Lambda(Z)$ 是 R_+^2 上的广义连续函数,故当 $Z' \to Z$ 时,$|\Lambda(Z') - \Lambda(Z)|$ 并不一定趋于零,故 X 不一定是随机连续的,所以二参数广义正则可加流 X 一般不是一个 Lévy 过程。故定理 6 的结果并不被包含于 Adler R. J.[7] 已得到的结果当中。

参考文献

1 杨向群, 郭学鹏 .两参数广义 Poisson 过程 .数学学报, 1995, 38 (2): 207~216.

2 曾繁烈, 方世祖 .二参数随机事件流的研究 .广西大学学报 (自然科学版), 1992, 17 (3): 7~14.

3 李应求 .二参数平稳随机事件流 .湘潭大学学报 (自然科学版), 1989, 11 (3): 13~20.

4 方世祖 .二参数竖直平稳随机事件流 .广西大学学报 (自然科学版), 1995, 20 (1): 21~27.

5 Lvanoff B G. Poisson convergence for point processes on the plane. J Austral math, Soc. 1985. 39.

6 Vares M E. Local times for two-parameter Lévy processes. stoch Port Appl. 1983, 15 208~215.

7 Adler R J. Stoch Proc Appl, 1983, 15 3.

8 Хинчин Ая. Тео ВерИ ее, П Pи 1, ВbИ 1, 1956. 3~17.

(责任编辑: 蒋汉明 邓大玉)