广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (4): 58~60, 68

⑰
58-60,68

一类多滞量动力系统的稳定性与有界性及其应用*
Stability and Boundedness for a Class of Dynamical System with Delay's and Their Applications

O175.13

席鸿建
Xi Hongjian

(广西大学数学与信息科学系 南宁 530004)
(Dept. of Math. & Info. Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

A **摘要** 通过 Lyapunov 泛函方法,获得了一类多滞量动力系统的运动稳定性、有界性、周期运动存在性的几个定理. 应用所获得的定理解决了几个问题.

关键词 Lyapunov 函数 稳定性 有界性 周期运动 多滞量动力系统, 动力系统

Abstract The dynamical system with delay's is considered. We obtain some theorem on stability, boundedness, existence of periodic motions and stationary oscillation by means of the method of Lyapunov function.

Key words Lyapunov function, stability, boundedness, periodic motions

本文考虑如下系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sum\limits_{i=0}^{n} f_i(x) - \Phi(t,y) \\ \quad + \sum\limits_{j=1}^{m} \int_{-\tau_j}^{0} g_j(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s + p(t) \end{cases} \tag{1}$$

系统(1)属于多滞量的 *RFDE*. 在科学技术、工程技术上具有广泛的应用[2,4,5],因而其运动稳定性、有界性、周期运动的存在性、平稳振动存在性和时滞范围的计算等问题就显得十分重要. 本文解决了由于多时滞所带来的困难,给出了有关上述几个问题的定理. 所获结论易于计算、方便实用. 应用这些定理还解决了几个问题.

1 主要结果

首先考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sum\limits_{i=0}^{n} f_i(x) - \Phi(t,y) + \\ \quad \sum\limits_{j=1}^{m} \int_{-\tau_j}^{0} g(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2}$$

的运动稳定性问题. 其中 $\Phi(t,s) \in C(R^2), f_i, g_j \in C(-\widetilde{H}), \widetilde{H})(i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m), \widetilde{H} = \mathrm{const} \in R^+$.

这里 n、m 为任意正整数.

定理1 如果存在常数 $H > 0(H \leqslant \widetilde{H})$ 与 $C > 0$,使得

1) 当 $|x| \in (0,H)$ 时, $[\sum\limits_{i=0}^{n} f_i(x)]x > 0$.

2) 当 $|x| \in (0,H)$ 时, $|g_i(x)| \leqslant C, (i = 1,2,\cdots,n)$

3) $\dfrac{\Phi(t,y)}{y} > \mathrm{m} \cdot \mathrm{c} \cdot \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m}\{\tau_i\}$, 当 $|y| \in (0,H)$ 时

则系统(2)的平衡点稳定、一致稳定、渐近稳定和一致渐近稳定.

证明 不妨设 $\tau_m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m}\{\tau_i\}$. 取系统(2)的 Lyapunov 泛函为

$$V = \frac{1}{2}y^2 + \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{x} f_i(s)\mathrm{d}s + \frac{mc}{2}\int_{-\tau_m}^{0}\int_{t+s}^{t} y^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

则 $V_{(2)} = -y(t)\Phi(t,y(t)) + y(t)\sum\limits_{j=1}^{m}\int_{-\tau_j}^{0} g_i(x(t+$

1996-04-08收稿,1996-09-11修回。
*广西自然科学基金资助项目。

$s))y(t+s)\mathrm{d}s+\frac{mc}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s\leqslant-y(t)\Phi(t,y(t))+|y(t)|\sum_{j=1}^{m}\int_{-\tau_j}^{0}|g_j(x(t+s))||y(t+s)|\mathrm{d}s+\frac{mc}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s\leqslant-y(t)\Phi(t,y(t))+mc\int_{-\tau_m}^{0}|y(t)||y(t+s)|\mathrm{d}s$

$+\frac{mc}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s\leqslant-y(t)\Phi(t,y(t))+\frac{mc}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)+y^2(t+s)]\mathrm{d}s+\frac{mc}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s=-y(t)\Phi(t,y(t))+mc\tau_m y^2(t)<0$

由文献[4,5]即得本定理结论. 证毕.

类似的,我们可得如下定理

定理2 若系统(2)满足定理1的条件1)、2)且满足

3) 当 $|y|\in(0,H)$ 时, $\frac{\Phi(t,y)}{y}\geqslant \mathrm{m}\cdot \mathrm{c}\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}$, 则系统(2)的平衡点稳定和一致稳定.

以下考虑系统(1)的运动有界性问题. 在(1)中总设 $\Phi(t,y)\in C(R^2)$, f_i、$g_j\in C(R)$ $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$, $p(t)$ 在 R 上连续有界.

定理3 设存在常数 $c>0$ 与含原点在内的有界集 Ω, 使

1) 当 $|x|\to\infty$ 时, $\int_0^x[\sum\limits_{i=0}^{n}f_i(u)]\mathrm{d}u\to\infty$

2) 当 $x\in\Omega^C$ 时, $|g_j(x)|\leqslant C$ $\quad j=1,2,\cdots,m$

3) $y\Phi(t,y)\geqslant mcy^2\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}+yp(t)$ $\quad (t,y)\in R\times\Omega^C$

则系统(1)的每个运动都是有界的, 且系统(2)的运动还是一致有界的.

证明 由条件知, 存在包含原点的有界集 Ω_1, 使在 Ω_1^C 及 $R\times\Omega_1^C$ 上定理条件(2)(3)成立, 且有 $\frac{1}{2}y^2+\int_0^x[\sum\limits_{i=0}^{n}f_i(u)]\mathrm{d}u>0$. 不妨设 $\tau_m=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}$.

在 $R\times\Omega_1^C$ 上取系统(1)的 Lyapunov 泛函为

$$V=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x[\sum_{i=0}^{n}f_i(u)]\mathrm{d}u+\frac{cm}{2}\int_{-\tau_m}^{0}\int_{t+s}^{t}y^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

则在 $R\times\Omega_1^C$ 上有

$V'_{(1)}=-y\Phi(t,y)+y\sum\limits_{j=1}^{m}\int_{-\tau_m}^{0}g_j(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s+p(t)y(t)+\frac{cm}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s\leqslant-y\Phi(t,y)+|y|\int_{-\tau_m}^{0}\sum\limits_{j=1}^{m}|g_j(x(t+s))||y(t+s)|\mathrm{d}s+y(t)p(t)+\frac{cm}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s\leqslant-y\Phi(t,y)+cm\int_{-\tau_m}^{0}|y(t)||y(t+s)|\mathrm{d}s+y(t)p(t)+\frac{cm}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s\leqslant-y\Phi(t,y)+\frac{cm}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)+y^2(t+s)]\mathrm{d}s+y(t)p(t)+\frac{cm}{2}\int_{-\tau_m}^{0}[y^2(t)-y^2(t+s)]\mathrm{d}s=-y\Phi(t,y)+cmy^2(t)\tau_m+y(t)p(t)\leqslant 0.$

由此即得本定理结论. 证毕.

定理4 设系统(1)满足如下条件

1) 存在常数 $C>0$, 使 $x\in R$ 时 $|g_j(x)|\leqslant c$ $\quad (j=1,2,\cdots,m)$

2) $\Phi(t,y)$ 连续, 且当 Ω 为 R 的有界集时将 $R\times\Omega$ 映射成为有界集

3) 存在常数 $a>0$、$H>0$, 使当 $|y|\geqslant H$ 时 $\frac{\Phi(t,y)}{y}\geqslant a$

4) $\mathrm{m}\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}\cdot c<a$

5) $[\sum\limits_{i=0}^{n}f_i(x)]\mathrm{sgn}x\to\infty$ $\quad (|x|\to\infty)$

则系统(1)的运动是一致最终有界的.

证明 取 Lyapunov 函数为

$$V(y\cdot x)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x[\sum_{i=0}^{n}f_i(u)]\mathrm{d}u$$

不防设 $\tau_m=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}$. 因为 $\tau_m c<a$, 所以可取到这样的 $q>1$, 使 $qm\tau_m c<a$. 取 $P(s)=q^2s$, 设 $H_1=\mathrm{const}$ 足够大, 如有不等式 $H_1\leqslant|y(t+\theta)|$, $V(y(t+\theta),x)<P(Vy(t),x)$ $\quad\theta\in[-\tau_m,0]$, $x\in R$ 成立时, 有不等式 $|y(t+\theta)|\leqslant q|y(t)|$ 成立, 从而

$V'_{(1)}=yy'+\dot{x}(\sum\limits_{i=0}^{n}f_i(x))=-y\Phi(t,y)+y\sum\limits_{j=1}^{m}\int_{-\tau_j}^{0}g_j(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s+yp(t)\leqslant-y\Phi(t,y)+|y|\int_{-\tau_m}^{0}\sum\limits_{j=1}^{m}|g_j(x(t+s))||y(t+s)|\mathrm{d}s+yp(t)$

$\leqslant -y\Phi(t,y)+|y|\int_{-\tau_m}^{0} cm|y(t)|\mathrm{d}s+yp(t)\leqslant$

$-y\Phi(t,y)+cmq\tau_m y^2+|y||p(t)|\leqslant -y^2a+cmq\tau_m y^2+|y||p(t)|=-[-a-cmq\tau_m-\frac{|p(t)|}{|y|}]y^2$

因为$a-cmq\tau_m>0$，$p(t)$有界，所以当H_1足够大时，存在常数$\mu>0$使$a-cmq\tau_m-\frac{|p(t)|}{|y|}\geqslant\mu$对$|y|\geqslant H_1$成立. 故此时有$V_{(1)}\leqslant-\mu y^2$. 所以系统(1)运动的$y$坐标是一致最终有界的.

设系统(1)运动的y坐标对界β而言一致最终有界，取$W=V+y$则有

$$W_{(1)}=V_{(1)}+\dot{y}=-y\Phi(t,y)+y\sum_{j=1}^{m}\int_{-\tau_j}^{0}g_j(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s+yp(t)-\sum_{i=0}^{n}f_i(x)-\Phi(t,y)+\sum_{j=1}^{m}\int_{-\tau_j}^{0}g_j(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s+p(t)$$

由于$p(t)$有界，定理条件中的1) 2)成立，故存在常数$M>0$，使得当$|y|\leqslant\beta$时，$W_{(1)}\leqslant-\sum_{i=0}^{n}f_i(x)+M$成立. 由条件5)，能够选择常数$k>0$使$x\geqslant k$时有下等式$W_{(1)}\leqslant-\mu$成立. 因此存在常数$\alpha_1>0$，使系统(1)运动的$x$坐标在$|y|\leqslant\beta$内有$x\leqslant\alpha_1$. 同理，如果$\tilde{W}=V-y$，可以证明存在常数$\alpha_2>0$，使系统(1)的运动的$x$坐标在$|y|\leqslant\beta$内有$-\alpha_2>x$.

综上所述，系统(1)的运动是一致最终有界的. 证毕.

以下我们考虑系统(1)的周期运动问题与平稳振荡问题. 由文献[2,4]，可得如下定理.

定理5 如果定理4的诸条件均满足，且有

1)$\Phi(t+T,y)=\Phi(t,y)$对任意$(t,y)\in R^2$成立；

2)$p(t)$是周期为T的周期函数.

则系统(1)存在周期为T的周期运动.

定理6 若定理5的诸条件均成立，且对系统(1)的任意两个运动$x_1(t)$与$x_2(t)$，当$t\to\infty$时，都有$x_1(t)-x_2(t)\to 0$，则系统(1)存在平稳振荡.

2 应用

2.1 考虑如下系统

$$\ddot{x}(t)+\Phi(t,\dot{x}(t))+f(x(t))+\sum_{j=1}^{m}g_j(x(t-\tau_j))=p(t) \quad (3)$$

由于自然界许多确定性的运动规律可用系统(3)作为其数学模型，因而人们对其的研究是广泛的. 本文利用前面所得结论，研究系统(3)的运动稳定性、有界性、周期运动存在性等问题. 所得的判定方法，是文献[4,5]的推广.

在系统(3)中，设$\Phi(t,s)\in C(R^2)$，$f,g_j\in C(-\tilde{H},\tilde{H})(j=1,2,\cdots,m)$，$\tilde{H}=\mathrm{const}\in R^+$.

定理6 如果存在常数$H>0(H\leqslant\tilde{H}$与$c>0$使

1) 当$|x|\in(0,H)$时，$[f(x)+\sum_{j=1}^{m}g_j(x)]x>0$

2) 当$|x|\in(0,H)$时，$|g_j'(x)|\leqslant C\quad(j=1,2,\cdots,m)$

3) 当$|y|\in(0,H)$时，$\frac{\Phi(t,y)}{y}>\mathrm{mc}\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}$

4)$f(0)+\sum_{j=1}^{m}g(0)=0$、$\Phi(t,0)=0\quad t\in R$

则系统

$$\ddot{x}(t)+\Phi(t,\dot{x}(t))+f(x(t))+\sum_{j=1}^{m}g_j(x(t-\tau_j))=0 \quad (4)$$

的平衡点稳定、一致稳定、渐近稳定和一致渐近稳定.

证明 系统(4)等价于

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-[f(x)+\sum_{j=1}^{n}g_j(x)]-\Phi(t,y)\\ \qquad+\sum_{j=1}^{m}\int_{-\tau_j}^{0}g_j'(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s\end{cases}$$

由定理1即得本定理结论.

定理7 Ⅰ 设存在常数$c>0$与包含原点在内的有界集Ω，使

1) 当$|x|\to\infty$时，$\int_{0}^{x}[f(x)+\sum_{j=1}^{m}g_j(x)]\mathrm{d}x\to\infty$

2)$|g_j'(x)|\leqslant c\quad(j=1,2,\cdots,m)$，$x\in\Omega^C$

3) $\frac{\Phi(t,y)}{y}\geqslant\mathrm{mc}\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}+\frac{p(t)}{y}\quad(t,y)\in R\times\Omega^C$

则系统(3)的每个运动都是有界的，且系统(3)的运动还是一致有界的.

Ⅱ 设存在常数$c>0$，$a>0$，$H>0$，使

1)$|g_j'(x)|\leqslant C\quad(j=1,2,\cdots,m)\quad x\in R$

2)$\Phi(t,y)$连续，且当Ω为R的有界集时$\Phi(t,y)$，将$R\times\Omega$映射成有界集. 且当$|y|\geqslant H$时，$\frac{\Phi(t,y)}{y}\geqslant a$

(下转第68页 Continue on page 68)

3 Chen Z X, Gao Z Ongsheng. On the complex oscillation theory of non-homogeneous linear differential equations, Acta Math. Sinica, 1992, 53 (2): 196～203.

4 Chen Tewei. The complex oscillation of a class of non-homogeneous linear differential equations, Kexue Tongbao, 1990, (9): 713～714.

5 Gao Shian. On the complex oscillation of solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients, Comment, Math. Univ. St. Paul., 1989, 38 (1): 11～20.

6 Gao Shian. Two theorems on the complex oscillation theory of non-homogeneous linear differential equations, J. Math. App., 1991, 162 (2): 381～391.

7 Gao Shian, Wang Sheng, Chen Zongxuan, A note on the complex oscillation of non-homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients, Ann. of Diff. Eqs. 1995, 11 (2): 176～182.

8 Hayman W. Meromorphic functions, Clarenden Press, Oxford, 1964.

9 Laine I. A note on the complex oscillation theory of non-homogeneous linear differential equations, Results in Math, 1990, 18: 282～285.

（责任编辑：蒋汉明　邓大玉）

（上接第60页 Continue on page 60）

3) $m\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}\cdot C < a$

4) 当 $|x|\to\infty$ 时，$[f(x)+\sum\limits_{j=1}^{m}g_j(x)]\mathrm{sgn}x\to\infty$

则 1) 系统(3) 的运动是一致最终有界的.

2) 若还有 $\Phi(t+T,y)=\Phi(t,y)$ 对任意 $(t,y)\in R^2$ 成立，且 $p(t)$ 是周期为 T 的周期函数，那么系统(3) 存在周期为 T 的周期运动.

3) 若系统(3) 的任意两个运动 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 均满足 $x_1(t)-x_2(t)\to 0(t\to\infty)$，那么系统(3) 存在平稳振荡.

证明　注意到系统(3) 等价于

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-[f(x)+\sum\limits_{j=1}^{m}g_j(x)]-\Phi(t,y)\\ \qquad+\sum\limits_{j=1}^{m}\int_{-\tau_j}^{0}g_j'(x(t+s))y(t+s)\mathrm{d}s+p(t)\end{cases}$$

由定理 4、5、6 即得本定理结论.

2.2　考虑具有时滞恢复力 $\sum\limits_{j=1}^{m}[\mu_j\sin x(t-\tau_j)+v_jx(t-\tau_j)]$，外力是 $p(t)$ 和摩擦与速度成比例的反馈系统

$$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t))+\sum_{j=1}^{m}[\mu_j\sin x(t-\tau_j)+v_jx(t-\tau_j)]=p(t) \tag{5}$$

这里 $a>0,v_j>0(j=1,2,\cdots,m)$　$\mu_j\in R(j=1,2,\cdots,m),\tau_j>0$ 为常数.

我们将定理 7 应用于系统(5)，其中 $\Phi(t,\dot{x}(t))=a\dot{x}(t),f(x(t))\equiv 0$　$g_j(x(t-\tau_j))=\mu_j\sin(x-\tau_j)+v_j(x-\tau_j)$　$(j=1,2,\cdots,m)$.

定理 8　Ⅰ 当 $p(t)\equiv 0$(外力为零) 时，若

1) $|\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j|+\sum\limits_{j=1}^{m}v_j>0$

2) $m\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{|\mu_j|+|v_j|\}\cdot\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\tau_j\}<a$　(6)

则系统(5) 的运动稳定、一致稳定、渐近稳定和一致渐近稳定.

Ⅱ 若 $p(t)$ 连续有界且不等式(6) 成立，则

1) 系统(5) 的运动是一致最终有界的.

2) 此外，若 $p(t+T)=p(t)$，那么系统(5) 存在周期为 T 的周期运动.

参考文献

1 Burton T A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Orlando: Academic Press, 1985.

2 Kolmanovskii V B, Nosov V R. Stability of Functional Differential Equations, Orlando: Academic Press, 1986.

3 秦元勋，刘永清，王　联，郑祖庥. 带有时滞的动力系统的运动稳定性. 北京：科学出版社，1989.

4 Hale J K. Theory of Funetional Differential Equations, Spring-verlag, New York, 1977.

5 李森林，温立志. 泛函微分方程. 湖南：湖南科技出版社，1987.

（责任编辑：邓大玉　蒋汉明）