DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.02.004
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (2): 13~ 14

圆周上扩张自映射的迭代根
Iterative Solutions of Expanding Self-maps of Circle

孙太祥
Sun Taixiang

(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(Dept. of Math. & Info Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 得到圆周上所有扩张自映射具有 n 阶迭代根的充要条件。
关键词 扩张自映射 迭代根 映射度 拓扑共轭

Abstract Necessary and sufficient condition of all expanding self-maps of circle having n-order iterative solutions was determined.

Key words expanding self-map, iterative solution, degree of mapping, topological conjugacy

设 X 是个拓扑空间, $C^0(X)$ 表示 X 上所有连续自映射之集,任取 $f\in C^0(X)$,若存在 $g\in C^0(X)$ 及自然数 $n\geqslant 2$,使 $f=g^n$,则称 g 是 f 的一个 n 阶迭代根(其中 g^n 表示 g 的 n 次复合).

关于迭代根的研究历来以久[1~3],在文献[4]中,麦结华得到了圆周自同胚具有 n 阶迭代根的条件,本文将讨论圆周 S^1 上的所有扩张自映射的迭代根.

设映射 $\mathrm{C}: R\to S^1$ 为 $\mathrm{C}(x)=e^{2\mathrm{c}ix}$, $f\in C^0(S^1)$, $F\in C^0(R)$,如果满足

$$\mathrm{C}\circ F=f\circ \mathrm{C},$$

则称 F 是 f 的一个提升.

如果 F 是 f 的一个提升,则存在一个整数 k,使对任 $x\in R$,都有 $F(x+1)=F(x)+k$,我们称 k 为 f 的映射度,记为 $\deg(f)=k$,关于提升及映射度的有关性质,可参见文献[5].

定义 设 $f\in C^0(S^1)$, F 是 f 的一个提升,若存在常数 $\lambda>1$,使对任 x_1、$x_2\in R$,都有 $|F(x_1)-F(x_2)|\geqslant\lambda|x_2-x_1|$,则称 $f(x)$ 是个扩张自映射,称 λ 是 $f(x)$ 的一个扩张常数.

显然,若 $f\in C^0(S^1)$ 是个扩张自映射, F 是它的一个提升,那么 $F\in C^0(R)$ 是个同胚.本文的主要结论是

定理 若 $f\in C^0(S^1)$ 是个扩张自映射, $\deg(f)=k$,则 f 有 n 阶迭代根的充要条件是:存在整数 d 使 $k=d^n$.

1996-01-28收稿。

1 主要定理的证明

引理 设 f、$g\in C^0(S^1)$ 是两个扩张自映射且 $\deg(f)=\deg(g)$,则 f 与 g 拓扑共轭.

证明 设 F、G 分别是 f、g 的提升,又设 $\deg(f)=\deg(g)=m$,则

$$F(x+1)-F(x)=G(x+1)-G(x)=m,$$

因 $G(x)$ 是个同胚,故 $G^{-1}(x+m)-G^{-1}(x)=1$.

令 $H_{FG}\subset C^0(R)$ 是由满足 $H(x+1)=H(x)+1$ 的 R 上的连续自映射组成的集合,在 H_{FG} 上定义度量 d 为,对任 H_1、$H_2\in H_{FG}$

$$\mathrm{d}(H_1,H_2)=\max_{x\in R}|H_1(x)-H_2(x)|,$$

则 H_{FG} 是个完备的度量空间,现在 H_{FG} 上定义一个映射 T 为,对任 $H\in H_{FG}$,

$$T(H)=G^{-1}\circ H\circ F,$$

令 G 的扩张常数为 $\lambda(>1)$,则对任 H_1、$H_2\in H_{FG}$,

$$\mathrm{d}(T(H_1),T(H_2))\leqslant\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}(H_1,H_2),$$

由压缩映射定理知存在唯一的 $H\in H_{FG}$ 使 $T(H)=H$,即 $G\circ H=H\circ F$.

仿照上面的做法,同样可证在 H_{GF} 内存在唯一的 $\bar{H}$,使 $F\circ\bar{H}=\bar{H}\circ G$,从而 $\bar{H}\circ H\circ F=\bar{H}\circ G\circ H=F\circ\bar{H}\circ H$,另外,可以证明在 H_{FF} 内存在唯一

的 h,使 $h\circ F = F\circ h$,但 R上的恒等映射 $id_R \in H_{FF}$ 也使 $id_R\circ F = F\circ id_R$,所以 $\bar{H}\circ H = id_R$,同理可证 $H\circ\bar{H} = id_R$,从而 H是 R上的同胚,且 $H(x+1) = H(x)+1$,令 $h(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi iH(x)}\ (x\in R)$,则 $h\in G^0(S^1)$,且是一个同胚.由 $H\circ F = G\circ H$得 $\pi\circ H\circ F = \pi\circ G\circ H$,从而 $h\circ f = g\circ h$,这说明 f与 g拓扑共轭.

主要定理的证明　必要性　若 f有 n阶迭代根 g,则 $f = g^n$.令 $d = \deg(g)$,由 $\deg(f) = \deg(g^n) = (\deg(g))^n$ 可得 $k = d^n$.

充分性　如果存在整数 d,使 $k = d^n$,令 $g(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi idx}\ (x\in R)$,那么 $g^n(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi id^n x} = e^{2\pi ikx}$,它是以 k为映射度的扩张自映射,由引理知存在同胚 $h\in G^0(S^1)$,使 $h\circ f = g^n\circ h$,令 $p = h^{-1}\circ g\circ h$,则 $f = p^n$,从而 f有 n阶迭代根.

参考文献

1 Rice R E et al, When is $f(f(z)) = aZ^2 + bZ + C$? Amer. Math. Monthly, 1980, 87: 252～263.

2 张景中,杨　路.论逐段单调连续函数的迭代根.数学学报,1983,26(4): 398～412.

3 Isaacs R. Iterates of fractional order, Canad. J. Math, 1950, 2: 409～416.

4 麦结华.圆周上自同胚有 n阶迭代根的条件.数学学报,1987,30(2): 280～283.

5 朱德明,韩茂安.光滑动力系统.上海: 华东师范大学出版社,1993,3.

(责任编辑: 蒋汉明　唐铃弟)

(上接第 8页 Continue from page 8)

是一个从△到整个复平面 E的同胚并且满足方程:

$$w_{\bar z} - z^2\left|\frac{z-a}{1-az}\right|^2 w_z = 0.$$

3. 函数 $w(z) = \dfrac{z}{1+\sqrt{1-|z|^2}}$ 同胚映射△为△并且满足方程

$$w_{\bar z} - \frac{z^2}{(1+\sqrt{1-|z|^2})^2} w_z = 0,$$

注意 $q(z) = \dfrac{z^2}{(1+\sqrt{1-|z|^2})^2}$ 在 $\partial\triangle$ 上满足 $q(z) = z^2$,但是定理 2在此不能成立,原因在于 $q(z)$只在边界 $\partial\triangle$ 不可导.

4. 函数是一个从△到△的同胚并且满足方程:

$$w_{\bar z} - \frac{z(1+z)}{1+\bar z} w_z = 0,$$

但是 $w(z)$不能连续延拓到闭单位圆盘 $\bar\triangle$ 上,故定理 2在此不能成立.注意复伸张 $q(z)$只在一个点 $z = -1$上不满足定理 2的条件.这个例子表明,如果当 $r\to 1$时如果 $1-|q(re^{i\theta})|\to 0$太快,则 Beltrami方程的同胚解要有到闭单位圆盘上的连续(或者同胚)延拓,必须要有更强的条件才行.

参考文献

1 Ahlfors L. Lecture on quasiconformal mappings. Princeton, 1966.

2 Lehto O. Remarks on reneralized Beltrami equations and conformal mappings. Proc. Romanian-Finish Seminal on Teichmuller Spaces and Quasiconformal Mappings, 1969. 203～241.

3 李　忠.关于 Beltrami同胚解的一点注记.北京大学学报(自然科学学报),1989,25(1),8～17.

4 Li Zhong, Locally Quasiconformal Mappings and the Dirichlet Problem of Degenerating Elliptic Equations. Complex Variable Theory, 1993, (23): 3～4, 231～247.

(责任编辑: 蒋汉明　邓大玉)