DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.02.003
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (2): 9~ 12

Heilbronn问题初探
A Preliminary Study on the Problem Heilbronn

苏文龙
Su Wenlong
(广西梧州市第一中学 梧州 543002)
(Wuzhou No. 1 Middle School, Wuzhou, Guangxi, 543002)

摘要 解决了 $n=9$的 Heilbronn问题，并建立了一套新的理论，为进一步研究其他情形提供一个有效的方法.

关键词 规范的 n阶完全图 第一类 Heilbronn图

Abstract This paper has solved the Heilbronn problem as $n=9$, established a set of new theory and provided an effective method for the further study on other situations.

Key words standard n orders complete graph, first class Heilbronn graph

平面上任意给定 n个点，每两点之间有一个距离，其中最大距离与最小距离之比为 λ，求 λ的最小值(即 $\inf\lambda$).这就是著名的 Heilbronn问题. 1940年 L. Fejes Tóth发表了一个有关的定理[1]，Thue得到一个经典的结论[2]:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\inf\lambda}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sqrt{12}}{c}}$$

此后经中、外学者数十年的努力探索，至今已解决了 $n\leqslant 8$的情形[2,11].但这些文献的推导甚烦，也不便于推广，因而这问题的研究相当艰难而进展极慢.文献[9]曾猜测当 $n=9$时有 $\inf\lambda=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$，多年来未曾有人作出证明或否定，可见当 n越来越大时已知的方法很难奏效了.为此，本文作出新的尝试:引进规范的 n阶完全图的有关概念，推演成初步的理论，为研究这著名的难题闯出新路.据此，发现文献[9]中关于 $n=9$的猜测是错误的，并给出了正确的答案.

1 规范的 n阶完全图的若干命题

考察复平面$\sum$上任意给定的点集 V.熟知，$|V|$表示点集 V中所含元素的个数并称为 V的阶，V中任意两点的距离的最大值称为 V的直径.如果 V中任意两点的距离的最小值为 1，我们就称 V是规范的.对于给定的参数 $\lambda>1$，如果 V中任意两点 A，B满足 $1\leqslant|AB|\leqslant\lambda$，我们就称点集 V是(关于参数 λ)闭规范的;如果 V中任意两点 A，B满足 $1\leqslant|AB|<\lambda$，就称点集 V是(关于参数 λ)开规范的.约定，当 $|V|\leqslant 1$时点集 V是闭规范的和开规范的.

设 $n\geqslant 4$阶完全图 G的顶集 $V=\{z_1,\cdots,z_n\}$是规范的，此时我们也称图 G是规范的.图 G的直径是顶集 V的直径，记为 $[G]$.约定，以后总是取定参数 $\lambda=[G]$.此时顶集 V是闭规范的.

定义 1 设 $z_i\in V$，顶集 V中去掉 z_i的余集记为 $\bar{V}_i$，令

$$U_i=\{z\mid z\in\sum \text{ 且 } 1\leqslant|zz_i|<\lambda\}$$

称为顶点 z_i的开圆环，$\bar{V}_i$的所有各顶点的开圆环的交集 W称为顶点 z_i的开正则区域.

W未必是连通的，因此本文的“区域”与通常的理解未必相同.约定，我们用“点集”表示离散的集合，“区域”是若干个通常的区域的并集.

命题 1 如果 $W\neq\varnothing$，则对于任意的点 $z\in W$与 $z_j\in\bar{V}_i$，有 $1\leqslant|zz_j|<\lambda$.

证明 设 $z\in W$与 $z_j\in\bar{V}_i$，则点 z属于 $\bar{V}_i$的所有各顶点的开圆环的交集，必有 $z\in U_j$.据定义 1知 $1\leqslant|zz_j|<\lambda$.

定义 2 设顶集 V的一个非空子集 V'的余集(全集是 V)为 $\bar{V}'$，$\bar{V}'$的所有各顶点的开圆环的交集 $W(V')$称为 V'的开正则区域.

命题 2 如果 $W(V')\neq\varnothing$，则对于任意的点 $z\in W(V')$与 $z_j\in\bar{V}'$，有 $1\leqslant|zz_j|<\lambda$.

证明 设 $z\in W(V')$与 $z_j\in\bar{V}'$，则 z属于 $\bar{V}'$的

1995-12-20收稿.

所有各顶点的开圆环的交集,就有 $z\in U_j$,据定义 1有 $1\leqslant |zz_j|<\lambda$.

定义 3 所有满足 $V''\subseteq W(V')$ 的开规范点集 V'' 的阶数 $|V''|$ 的最大值,称为 $W(V')$ 的容度,记为 $|W(V')|$.

命题 3 设点集 V'' 与 $\bar{V}'$ 都是开规范的且 $V''\subseteq W(V')$,则 $\bar{V}'\cap V''=\varnothing$ 且点集 $\bar{V}'\cup V''$ 是开规范的.

证明 设 $\bar{V}'$ 与 $V''\subseteq W(V')$ 都是开规范的.当 $V''=\varnothing$ 时显然 $\bar{V}'\cup V''$ 是开规范的.如果 $V''\neq\varnothing$,考察点集 $\bar{V}'\cup V''$ 中任意两点 A,B,当 $A,B\in\bar{V}'$ 或 $A,B\in V''$ 时显然有 $1\leqslant|AB|<\lambda$;当 $A\in\bar{V}'$ 且 $B\in V''\subseteq W(V')$ 时据命题 2知 $1\leqslant|AB|<\lambda$,因此 $1\leqslant|AB|<\lambda$ 恒成立,故 $\bar{V}'\cup V''$ 是开规范的,并且易知此时 $\bar{V}'\cap V''=\varnothing$.

定义 4 如果 $|W(V')|\geqslant|V'|$ 且 $\bar{V}'$ 是开规范的,就称 $\bar{V}'$ 是不正规的,否则称为正规的.

命题 4 对于顶集 V 的任意两个非空子集 $\bar{V}''\subset\bar{V}'$,有 $W(V')\subset W(V'')$ 并且有: $\bar{V}'$ 是不正规的 $\Rightarrow\bar{V}''$ 是不正规的.

证明 设 $\bar{V}'$ 是不正规的且 $\bar{V}''\subset\bar{V}'$,则 $V'\subset V''$.不失一般性,设

$$V'=\{z_1,\cdots,z_i\},\ \bar{V}'=\{z_{i+1},\cdots,z_k,z_{k+1},\cdots,z_n\}$$

$$V''=\{z_1,\cdots,z_i,z_{i+1},\cdots,z_k\},\ \bar{V}''=\{z_{k+1},\cdots,z_n\}$$

令 $Q=V''\cap\bar{V}'=\{z_{i+1},\cdots,z_k\}$,则 $|Q|=|V''|-|V'|$,并且有 $\bar{V}'=Q\cup\bar{V}''$.因为 $\bar{V}'$ 是不正规的,所以 $\bar{V}'$ 是开规范的并且 $|W(V')|\geqslant|V'|$,据定义 3知存在 $|V'|$ 阶的开规范点集 $P=\{x_1,\cdots,x_i\}\subseteq W(V')$.据命题 3知点集 $P\cup\bar{V}'=P\cup Q\cup\bar{V}''$ 是开规范的,即对于任意的点 $z\in(P\cup Q)$ 与 $z_j\in\bar{V}''$ 有 $1\leqslant|zz_j|<\lambda$,据定义 1知 $z\in U_j$ 即 z 属于 $\bar{V}''$ 中任意一个顶点 z_j 的开圆环,也就属于 $\bar{V}''$ 的所有各顶点的开圆环的交集 $W(V'')$,故有 $z\in(P\cup Q)\Rightarrow z\in W(V'')$ 即得 $(P\cup Q)\subseteq W(V'')$.注意到 $P\cup Q$ 是 $|V''|$ 阶的开规范点集,据定义 3知 $|W(V'')|\geqslant|V''|$,并且由 $\bar{V}''\subset\bar{V}'$ 知 $\bar{V}''$ 也是开规范的,因此据定义 4知 $\bar{V}''$ 是不正规的.故有 $\bar{V}'$ 是不正规的 $\Rightarrow\bar{V}''$ 是不正规的.据定义 2关于正则区域的构造也容易证明 $\bar{V}''\subset\bar{V}'\Rightarrow W(V')\subset W(V'')$.

定义 5 如果顶集 V 的阶数 $\geqslant 2$ 的两个子集 V' 与 V'' 的顶点之间存在一个一一对应关系,并且 V' 中任意两个顶点 A,B 和 V'' 中分别与这两个顶点对应的 C,D,它们的距离都相等: $|AB|=|CD|$,就称点集 V' 与 V'' 是同构的,并记 $V'\sim V''$.仿此可定义两个图的同构关系.

显然,两个同构的子集作成图 G 的两个子图,这两个子图是能够叠合或者反转(即把其中一个图所在的平面的上、下侧倒转过来)叠合在一起而重合的,因此据定义 2关于正则区域的构造可知,如果 $\bar{V}'\sim\bar{V}''$,那么 $W(V')$ 与 $W(V'')$ 也是能够叠合或者反转叠合在一起而重合的.此时显然有 $|W(V')|=W(V'')$,故有

命题 5 如果 $\bar{V}'\sim\bar{V}''$,那么 $\bar{V}'$ 是正规的 $\Leftrightarrow\bar{V}''$ 是正规的.

2 第一类 n 阶 Heilbronn 图的若干定理

定义 6 如果对于任意一个与图 G 不同构的规范的 n 阶完全图 G' 有 $[G']>[G]$,就称图 G 为第一类 n 阶 Heilbronn 图,并记 $\lambda_n=[G]$ 称为关于 n 的 Heilbronn 数.

定理 1 图 G 不是第一类 n 阶 Heilbronn 图 $\Leftrightarrow$ 顶集 V 存在一个 $k(k\geqslant 2)$ 阶不正规子集.

证明 设 $\bar{V}'$ 是不正规的,则 $\bar{V}'$ 是开规范的且 $|W(V')|\geqslant|V'|$,据定义 3知存在一个 $|V'|$ 阶的开规范点集 $V''\subseteq W(V')$.据命题 3知点集 $\bar{V}'\cup V''$ 是开规范的并且 $|\bar{V}'\cup V''|=|\bar{V}'|+|V'|=n$.以这 n 阶开规范点集 $\bar{V}'\cup V''$ 为顶集作成一个 n 阶完全图 G',就有 $[G']<\lambda=[G]$,据定义 6知图 G 不是第一类 n 阶 Heilbronn 图.

设图 G 不是第一类 n 阶 Heilbronn 图,而图 G' 才是第一类 n 阶 Heilbronn 图,则 $\lambda'=[G']<[G]=\lambda$.考察 G 与 G' 的顶集的所有开规范子集,如果存在这样的点集 $\bar{V}'$,它既与图 G 的顶集的某一个子集同构,又与图 G' 的顶集的某一个子集同构,我们就称 $\bar{V}'$ 为图 G 与 G' 的公共顶点的集合,注意到图 G 与 G' 都是规范的,它们分别至少有一条边的长度为 1(这条边的两个端点作成一个规范的 2阶点集,它显然包含于公共顶点的集合),因此这样的公共顶点的集合是存在的且它的阶数 $\geqslant 2$.设开规范点集 $\bar{V}'$ 是图 G 与 G' 的任意一个公共顶点的集合,图 G 与 G' 中不属于 $\bar{V}'$ 的其余顶点作成的集合分别记为 V' 与 V'',则 $|V'|=|V''|$.考察图 G' 中任意两个顶点 z_i 与 z_j,其中 $z_i\in\bar{V}'$,$z_j\in V''$,有 $1\leqslant|z_iz_j|\leqslant[G']=\lambda'<\lambda$,据定义 1知 $z_j\in U_i$,即点 z_j 属于 $\bar{V}'$(注意它是图 G 与 G' 的公共顶点的集合)中任意一个顶点的开圆环,也就属于 $\bar{V}'$ 的所有各顶点的开圆环的交集 $W(V')$,因此对于任意一点 $z_j\in V''\Rightarrow z_j\in W(V')$,即得 $V''\subseteq W(V')$,据定义 3有 $|W(V')|\geqslant|V''|=|V'|$,据定义 4知图 G 的顶集 V 的开规范子集 $\bar{V}'$(其阶数 $\geqslant 2$)是不正规的.证毕.

在上述证明中也可以取定 $\bar{V}'$ 是顶集 V 的任意一个规范的 2阶子集(即其中两顶点的距离为 1的子集),此时可证明得相应的

定理 2 图 G不是第一类 n阶 Heilbronn图$\Leftrightarrow$顶集 V的(任意的)一个规范的 2阶子集是不正规的.

上述两个定理的逆否定理也成立,故有

定理 3 图 G是第一类 n阶 Heilbronn图的充要条件是: 顶集 V有一个规范的 2阶子集是正规的.

定理 4 图 G是第一类 n阶 Heilbronn图的充要条件是: 顶集 V的任何一个 $k\,(k\geqslant 2)$阶子集都是正规的.

据命题 4知当 $\overline{V}''\subset \overline{V}'$时 $W(V')\subset W(V'')$,由于确定面积较小的的 $W(V')$ 的容度比较确定面积较大的 $W(V'')$的容度要容易得多,因此确定阶数较大的 $\overline{V}'$是否正规就比较容易.我们在应用定理 1或定理 4判断一个图 G是否第一类 n阶 Heilbronn图时,通常可按阶数从大到小的顺序逐个检查顶集 V的开规范子集是否存在不正规的.如果发现有一个子集是不正规的,那么就不必再检查下去(因为据定理 1已经可以作出判断),否则就应继续检查,直到规范的 2阶点集.据命题 5可知同构的若干个子集只须任意地检查其中一个,这就大大加快的检查进程.由于顶集 V的开规范子集只有有限个并且还可以按同构关系(它显然是一个等价关系)分成若干等价类,因此上述操作过程总可以在有限步之内完成,于是我们的理论也提供了一个可供操作的有效方法.一般地说,当 $[G]$与关于 n的 Heilbronn数 λ_n相差越大时,就越容易找到阶数较大的不正规子集,因此我们引进

定义 7 图 G的顶集 V的所有不小于 2阶的不正规子集的阶数的最大值,称为图 G的宽松度并记为 $\|G\|$.约定,如果顶集 V的任何 $k\,(k\geqslant 2)$阶子集都是正规的,就令 $\|G\|=0$.

图 G的宽松度在某种意义上反映了 $[G]$与 λ_n的相差程度: 宽松度越大则 $[G]$与 λ_n的相差越大.据定理 4我们有

定理 5 图 G是第一类 n阶 Heilbronn图的充要条件是 $\|G\|=0$.

显然,第一类 n阶 Heilbronn图及其 λ_n是关于 n的 Heilbronn问题的解答,因此上述理论就初步揭开了这著名的难题的奥秘.

3 关于 $n=9$的 Heilbronn问题的解答

文献[9]曾猜测: 当 $6\leqslant n\leqslant 9$时正 $n-1$边形的顶点与中心作成的 n阶点集给出关于 n的 Heilbronn问题的解答.其实 $n=6$时早已于 1986年由文献[6~8]确定,而 $n=7,8$的情形则于 1995年由文献[10]和[11]证实(后者篇幅长达 18 000字).但 $n=9$的猜测尚未有人作出结论,可见难度越来越大.事实上,运用本文的理论,我们不但能够对 $4\leqslant n\leqslant 8$的已知成果作出简洁的证明,而且很容易否定文献[9]中关于 $n=9$的猜测.如图 1,正八边形的顶点为 $z_1,\cdots,z_8$,中心为 z_9. 以此为顶集 V作成的图 G有 $[G]=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.设 $V'=\{z_4,\cdots,z_8\}$,$\overline{V}'=\{z_1,z_2,z_3,z_9\}$,则 $W(V')$如图阴影所示.通过计算易知在这区域内可以很容易找到 5阶开规范点集 $V''=\{A,B,C,D,E\}$如图所示.因此据定义 3知,$|W(V')|\geqslant|V'|$,据定义 4知开规范子集 $\overline{V}'$是不正规的,据定理 1知图 G不是第一类 9阶 Heilbronn图,并且 9阶点集 $\overline{V}'\cup V''$是开规范的,它作成的图 G'有 $[G']<[G]$.因此文献[9]关于 $n=9$的猜测是错误的.据定义 7知 $\|G\|\geqslant 4$,因此图 G是较宽松的,$\sqrt{4+2\sqrt{2}}$比关于 $n=9$的 Heilbronn问题的解 λ_9大得多.

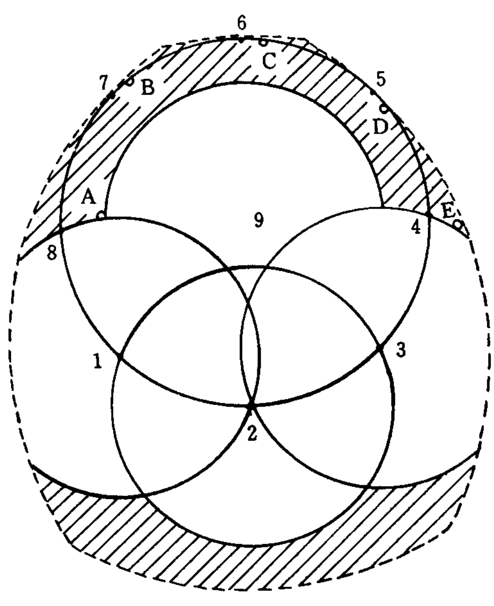

图 1 Fig. 1

为了求得 λ_9的正确答案,我们将构造一个规范的 9阶完全图 G,它的顶集 V包含一个规范的 2阶子集 $\overline{V}'=\{A,B\}$,参数 $\lambda=[G]$是待定的.我们考察 $W(V')$的容度.在 $W(V')$的闭包[即 $W(V')$及其边界的并集]内作一个以 AB(边长为 1)为一边、λ为对角线的矩形 $ABCD$,再以 AC为对角线作矩形 $AFCE$使 $|CE|=1$,然后取点 H、M、N使

$$\begin{cases}|HM|=|MN|=1,|HB|=|HF|=\lambda,\\|ME|=|MD|=|NB|=|NF|=1\end{cases}.$$

显然 H、M、N共线且点 D,C,F与 E、A、B关于直线 MN对称.以这对称轴为 x轴,直线 AC为 y轴作直角坐标系如图 2.设 $\theta=\angle NMD$,则由对称

性有 $M(-\frac{1}{2},0)$, $N(\frac{1}{2},0)$, $H(-\frac{3}{2},0)$, $C(0,\frac{\lambda}{2})$, $D(-\frac{1}{2}+\cos\theta,\sin\theta)$, $F(\frac{1}{2}-\cos\theta,\sin\theta)$.由对称性得 E. A. B的坐标.据 $|HF|=\lambda$, $|CD|=1$及直角三角形 ADC得方程组

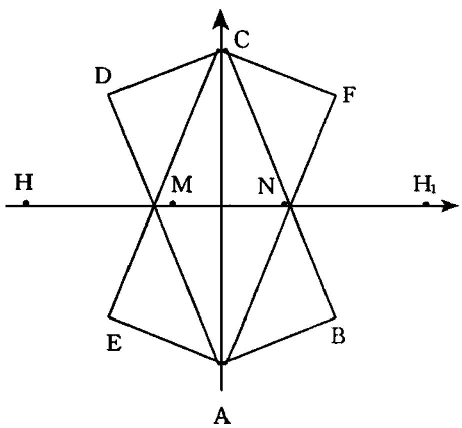

图 2 Fig. 2

$$\begin{cases}(2-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=\lambda^2,\\ (-\frac{1}{2}+\cos\theta)^2+(\frac{\lambda}{2}-\sin\theta)^2=1,\\ 1+(-\frac{1}{2}+\cos\theta)^2+(\frac{\lambda}{2}+\sin\theta)^2=\lambda^2.\end{cases}$$

这个方程组是相容的,并且可从第 1个方程得 $\cos\theta$,后两个方程得 $\sin\theta$,再据欧拉公式得关于λ的方程:

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{4}(5-\lambda^2),\ \sin\theta=(\lambda^2-2)/(2\lambda),\\ \lambda^6-6\lambda^4-7\lambda^2+16=0. \qquad (*)\end{cases}$$

在电子计算机上作双精度运算可得

$$\begin{cases}\lambda=2.586290620121739\cdots\\ \cos\theta=-0.42222479\cdots\\ \sin\theta=0.90649116\cdots\end{cases}$$

据此可确定各顶点坐标.设点 H关于 y轴的对称点为 $H_1(\frac{3}{2},0)$.容易验证 9阶点集 $V=\{A,B,C,D,E,F,M,N,H(或\ H_1)\}$是关于参数$\lambda$闭规范的,以 V为顶集作成的图 G有 $[G]=\lambda$.据上述作法可知,在 $W(V')$的闭包中恰能作成这样一个 7阶点集 $V'=\{C,D,E,F,M,N,H(或\ H_1)\}$,由此易知在 $W(V')$中再也不能包含任何一个开规范的 7阶点集,即 $|W(V')|<|V'|$.据定义 4知规范的 2阶子集 V'是正规的,据定理 3知图 G是第一类 9阶 Heilbronn图,于是我们有

定理 6 $\lambda_9=2.5862906\cdots$,它满足方程(*).

注意到顶点 H也可取为 H_1,似乎是不稳定的.但这两种取法所得的两个图同构.在本文的后续的系列文章中将讨论图的稳定性问题,深化规范的n阶完全图的研究,推导出一批新的成果.

致谢

本文的写作,承蒙广西科学院副院长罗海鹏高级工程师的热情帮助和指教,作者在此表示衷心的感谢!

参考文献

1 Fejes Tóth L, Uber einen geometrischen Satz, Math Z, 1940, 46 83~ 85.

2 田正平, 陈 计. 问题征解第 80题的注记和编者述评. 数学通讯, 1995, (5): 40.

3 陈 计. 问题征解第 80题的注记. 数学通讯, 1994, (1): 39~ 40.

4 胡湘陵译. 匈牙利奥林匹克数学竞赛题解. 北京: 科学普及出版社, 1979. 256~ 258.

5 单 . 数学竞赛研究教程. 南京: 江苏教育出版社, 1993. 444~ 446.

6 李文琦. 平面上凸六边形的一个性质. 天津师专学报 (自然科学版), 1986.

7 李文琦. 凸五边形及其内部一点. 中等数学, 1986, (1): 14~ 15.

8 李文琦, 吴元鸿, $\lambda_6=\max p_ip_j/\min p_ip_j\geqslant 2\sin 72^\circ$, 数学与研究 (中学数学), 1986, (12): 6~ 8.

9 吴报强. 关于 Heilbron型问题的一个猜测. 数学通报, 1991, (5): 41~ 43.

10 熊 斌, 田廷 . 七点的 Heilbron问题的证明. 数学通讯, 1995, (5): 20~ 23.

11 田廷 , 熊 斌. 平面八点的一个极值问题. 初等数学前沿. 南京: 江苏教育出版社, 1995. 145~ 168.

(责任编辑: 蒋汉明 邓大玉)