DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.01.004
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (1): 13~ 15

一类反应扩散方程的整体解及其熄灭行为
Global Solution and Extinction for a Class of Reaction-diffusion Equations

范恩贵 Fan Engui
(张家口农业专科学校基础部 河北张家口市 075131)
(Zhangjiakou Agricultural College, Zhangjiakou, Hebei, 075131)

潘 涛 Pan Tao
(广西大学数学与信息科学系 南宁市西乡塘路 10号 530004)
(Dept. of Math. and Info Sci., Guangxi Univ., 10 Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)

摘要 用半群方法研究一类反应扩散方程 $u_t - \triangle u + f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + g(u) = 0$的初边值问题. 在 $n \leqslant 3, f(s), g(s) \in C^2, g(s)s \geqslant 0$的条件下,得到整体经典解的存在唯一性. 给出这种解在有限时间内熄灭的一个充分条件.
关键词 反应扩散方程 整体解 熄灭

Abstract The initial-boundary value problems for a class of reaction-diffusion equation, $u_t - \triangle u + f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + g(u) = 0$, are studied by semigroup's method. Under the assumptions $n \leqslant 3, f(s), g(s) \in C^2, g(s)s \geqslant 0$, the existence and uniqueness of the global solution for the problem are obtained. A sufficient condition of the extinction of the solution is given.
Key words reaction-diffusion equation, global solution, extinction

文献 [1]用半群方法证明了对流扩散方程 $u_t - \triangle u + u\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$及 $u_t - \triangle u + (u+1)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$初边值问题整体经典解的存在唯一性.本文将上述二种方程推广为一般情形,考虑如下一类反应扩散方程的初边值问题.

$$\begin{cases} u_t - \triangle u + f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + g(u) = 0, & (1.1) \\ u(x,0) = u_0(x), & (1.2) \\ u|_{\partial\Omega} = 0. & (1.3) \end{cases}$$

其中 Ω 为 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界域, $n \leqslant 3$, 文中出现的 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 均表示 $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

本文充分利用非线性项中导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 的出现,对 $f(s), g(s) \in C^2, g(s)s \geqslant 0$且不受小初值限制,用半群方法和先验估计证明了问题(1.1)~ (1.3)具有唯一整体经典解,然后给出了这种解在有限时间内熄灭的一个充分条件.

1995-07-10收稿.

1 整体解的存在唯一性

取 $A = -\triangle, X = L^2(\Omega), D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), F(u) = -f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - g(u)$,则问题(1.1)~(1.3)化为如下 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + Au = F(u), & (2.1) \\ u(o) = u_0. & (2.2) \end{cases}$$

显然, A为极大增殖算子,但此处 $F(u)$既不是 $X \to X$ 的映射,也不是 $D(A) \to D(A)$ 的映射,为适应现在需要,引入一种新的空间.

定义 1 设 X为 Banach空间, $A: D(A) \to X$ 为极大增殖算子,其相应压缩半群为 $S(t)$,对任意 $0 < \Upsilon < 1$,记 $D_\Upsilon(A) = \{h | h \in X, \forall t > 0, S(t)h \in D(A)$ 且成立 $\sup_{0<h<1} h^\Upsilon \| AS(h)h\|_X < \infty\}$,并装配范数 $\|h\|_{D_\Upsilon(A)} = \|h\|_X + \sup h^\Upsilon \| AS(h)h\|_X$,则可以证明 $D_\Upsilon(A)$为 Banach空间,且 $D(A) \subset D_\Upsilon(A) \subset X$.

引理 1[1,2] 设 A为极大增殖算子,如果存在 $0 < \Upsilon < 1$,使 $F(u)$满足

i) $F(u): D(A) \to D_\Upsilon(A)$,

ii) $F(u)$局部 Lipschitz连续.

则对 $\forall u_0\in D(A)$,存在 $T_{\max}>0$使问题(2.1)~(2.2)有唯一经典解 $u\in C^1([0,T_{\max});X)\cap C^\circ([0,T_{\max});D(A))$,且 $T_{\max}=\infty$ 或 $T_{\max}<\infty$,此时 $\|u\|_{D(A)}\to\infty$,当 $t\to T_{\max}$.

引理 2[1] $H^1(\Omega)\subset D_{\frac{3}{4}}(A)$为连续嵌入.

定理 1 设$n\leqslant 3$, $f(s),g(s)\in C^2$, $u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$,则问题(1.1)~(1.3)存在唯一经典解, $u\in C'([0,T_{\max});L^2(\Omega))\cap C^\circ([0,T_{\max});H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$,且 $T_{\max}=\infty$ 或 $T_{\max}<\infty$,此时 $\lim\limits_{t\to T_{\max}}\|u\|_{H^2\cap H_0^1}\to\infty$.

证明 只需验证引理 1的 i)及 ii).

i) $F(u): D(A)\to D_{\frac{3}{4}}(A)$,

$\forall u\in D(A)$,由 $f,g\in C^2$及嵌入定理知

$$F(u)=-f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}-g(u)\in L^2(\Omega),$$

$$\frac{\partial F(u)}{\partial x_j}=-f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}-g'(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L^2(\Omega),\quad j=1,\cdots,n.$$

从而 $F(u)\in H^1(\Omega)$.再由引理 2知 $F(u)\in D_{\frac{3}{4}}(A)$.

ii) $F(u)$局部 Lipschitz连续,

$\forall u,v\in D(A)$,且 $\|u\|_{H^2},\|v\|_{H^2}\leqslant M$,由 $f,g\in C^2$及嵌入定理可知

$$\|f^{(k)}(u)\|_{L^\infty},\|g^{(k)}(u)\|_{L^\infty}\leqslant L(M),k=0,1,2. \tag{2.3}$$

$$\|f^{(k)}(u)-f^{k}(v)\|_{L^q}=\|f^{(k+1)}(u+\theta(u-v))(u-v)\|_{L^q}\leqslant L(M)\|u-v\|_{L^q}\leqslant L(M)\|u-v\|_{H^2},$$

$q\leqslant\infty$, $k=0,1$ (2.4)

$$\|g^{(k)}(u)-g^{(k)}(v)\|_{L^q}\leqslant L(M)\|u-v\|_{H^2},$$

$q\leqslant\infty$, $k=0,1.$ (2.5)

这里 $f^{(k)}$, $g^{(k)}$ 表示 k阶导数.

$$\|D^k u\|_{L^q},\|D^k V\|_{L^q}\leqslant M,\quad q\leqslant 6,\quad k=0,1 \tag{2.6}$$

注意到式(2.3)~(2.6),利用 Hölder不等式可知

$$\|F(u)-F(v)\|\leqslant\|f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i}\|+\|(f(u)-f(v))\frac{\partial v}{\partial x_i}\|+\|g(u)-g(v)\|\leqslant L(M)\|u-v\|_{H^2}. \tag{2.7}$$

$$\|\frac{\partial}{\partial x_j}(F(u)-F(v)\|\leqslant\|f(u)(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j})\|+\|(f(u)-f(v))\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\|+\|f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v}{\partial x_i})\|+\|f'(u)\frac{\partial v}{\partial x_i}(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial x_j})\|+\|(f'(u)-f'(v))\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\|+\|g'(u)(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v}{\partial x_j})\|+\|(g'(u)-(g'(v))\frac{\partial v}{\partial x_i}\|\leqslant L(M)\|u-v\|_{H^2}. \tag{2.8}$$

联合式(2.7)和式(2.8)并利用引理 2,得到

$$\|F(u)-F(v)\|_{D_{\frac{3}{4}}(A)}\leqslant L(M)\|u-v\|_{H^2}.$$

定理 2 在定理 1条件下,若 $g(s)s\geqslant 0$,则定理 1所得经典解为整体解,即 $T_{\max}=\infty$.

证明 采用反证法,设 $T_{\max}<\infty$.

用 u^{2k+1}与方程(1.1)两端作 $L^2(\Omega)$内积,有

$$\frac{1}{2k+2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^{2k+2}}^{2k+2}+(2k+1)\int_\Omega u^{2k}|Du|^2dx+\int_\Omega f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}u^{2k+1}dx+\int_\Omega g(u)u^{2k+1}dx=0. \tag{2.9}$$

注意到

$$\int_\Omega g(u)u^{2k+1}dx=\int_\Omega g(u)uu^{2k}dx\geqslant 0,$$

$$\int_\Omega f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}u^{2k+1}dx=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}(\int_0^u f(s)s^{2k+1}ds)dx=0,$$

则由式(2.9)可得

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^{2k+2}}^{2k+2}\leqslant 0. \tag{2.10}$$

从而在 $[0,t](t<T_{\max})$上积分式(2.10),可得

$$\|u\|_{L^{2k+2}}\leqslant\|u_0\|_{L^{2k+2}}\leqslant C\|u_0\|_{L^\infty}\leqslant C\|u_0\|_{H^2\cap H_0^1},\quad\forall t<T_{\max}.$$

令 $k\to\infty$,则有

$$\|u\|_{L^\infty(0,T_{\max};L^\infty(\Omega))}\leqslant C.$$

于是

$$\|f(u)\|_{L^\infty(0,T_{\max};L^\infty(\Omega))},\|g(u)\|_{L^\infty(0,T_{\max};L^\infty(\Omega))},\|g'(u)\|_{L^\infty(0,T_{\max};L^\infty(\Omega))}\leqslant C. \tag{2.11}$$

在式(2.9)中取 $k=0$,有

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+2\|\nabla u\|^2\leqslant 0,$$

由此得到

$$\|u\|_{L^2(0,T_{\max};H_0^1(\Omega))}\leqslant C. \tag{2.12}$$

将方程(1.1)两端对 t求导并乘 u_t,再在 Ω上积之,得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2+\|\nabla u_t\|^2=-\int_\Omega f'(u)u_t^2\frac{\partial u}{\partial x_i}dx-\int_\Omega f(u)\frac{\partial u_t}{\partial x_i}u_t dx-\int_\Omega g'(u)u_t^2dx \tag{2.13}$$

而

$$\int_\Omega f'(u)u_t\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}(f(u)u_t^2)\mathrm{d}x-2\int_\Omega f(u)u_t\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_\Omega f(u)\frac{\partial u_t}{\partial x_i}u_t\mathrm{d}x \qquad (2.14)$$

将式(2.14)代入式(2.13),并注意到式(2.11),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_t\|^2+2\|5u_t\|^2$$

$$=2\int_\Omega f(u)\frac{\partial u_t}{\partial x_i}u_t\mathrm{d}x-2\int_\Omega g'(u)u_t^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\|5u_t\|^2+C\|u_t\|^2,$$

于是由 Gronwall不等式,得到

$$\|u_t\|_{L^\infty(0,T_{\max};L^2(\Omega))},\ \|u_t\|_{L^2(0,T_{\max};H_0^1(\Omega))}\leqslant C. \qquad (2.15)$$

并联合式(2.12)知

$$\|u\|_{L^\infty(0,T_{\max};H_0^1(\Omega))}\leqslant C. \qquad (2.16)$$

于是利用方程(1.1)及上述各估计式(2.11),(2.15),(2.16)知

$$\|u\|_{D(A)}\leqslant C\|\triangle u_t\|$$

$$\leqslant C(\|u_t\|+\|f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\|$$

$$+\|g(u)\|)$$

$$\leqslant C,\qquad \forall t\in[0,T_{\max}).$$

这与二择性矛盾.故 $T_{\max}=\infty$.证毕.

2 整体解的熄灭行为

定义 2 如果存在 $T_0<\infty$,对问题(1.1)~(1.3)的解 $u(x,t)$ 成立

$$\begin{cases}u(x,t)\not\equiv0, & (x,t)\in\Omega\times[0,T_0),\\ u(x,t)\equiv0, & (x,t)\in\Omega\times[T_0,\infty),\end{cases}$$

则称 $u(x,t)$ 在有限时间内熄灭.

定理 3 设定理 1的条件满足,若 $u_0\not\equiv0$, $g(s)s\geqslant\lambda|s|^{1+T}$, $\lambda>0$, $0\leqslant T<1$,则问题(1.1)~(1.3)的整体经典解在有限时间内熄灭,并有如下估计

$$\begin{cases}\|u\|\leqslant(\|u_0\|^{2-k}-C_0t)^{\frac{1}{2-k}},t\in[0,T_0), & (3.1)\\ \|u\|=0, \qquad t\in[T_0,\infty) & (3.2)\end{cases}$$

其中 $C_0>0$, $T_0=\frac{1}{C_0}\|u_0\|^{2-k}$,

$$k=\frac{2n(1-T)+4(1+T)}{4+n(1-T)}.$$

证明 在本定理条件下,由定理 2知,问题(1.1)~(1.3)具有唯一整体经典解,下证此类解在有限时间内熄灭.

用 u 与方程(1.1)两端作 $L^2(\Omega)$ 内积,并注意到 $\int_\Omega f(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}u\,\mathrm{d}x=0$ 及 $\int_\Omega g(u)u\,\mathrm{d}x\geqslant\lambda\|u\|_{L^{1+T}}^{1+T}$,可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\|5u\|^2+\lambda\|u\|_{L^{1+T}}^{1+T}\leqslant0. \qquad (3.3)$$

利用 Nirenberg不等式,有

$$\|u\|\leqslant C\|u\|_{L^{1+T}}^{1-\theta}\|5u\|^\theta, \qquad (3.4)$$

其中 $\theta=\frac{n(1-T)}{n(1-T)+2(1+T)}$.

将(3.4)式两边 k 次幂,得到

$$\|u\|^k\leqslant C^k\|u\|_{L^{1+T}}^{k(1-\theta)}\|5u\|^{k\theta}.$$

在上式取 $k=\frac{2n(1-T)+4(1+T)}{n(1-T)+4}$,由 Young不等式,可得

$$\|u\|^k\leqslant C_1\|u\|_{L^{1+T}}^{1+T}+C_2\|5u\|^2.$$

将此估计代入式(3.3)中,便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+2C_0\|u\|^k\leqslant0, \qquad (3.5)$$

其中 $C_0=\frac{\min(1,\lambda)}{\max(C_1,C_2)}$.

由于 $0\leqslant T<1$,可知 $1<k<2$.解(3.5)式,有

$$\|u\|\leqslant\|u_0\|^{2-k}-C_0(2-k)t)^{\frac{1}{2-k}}. \qquad (3.6)$$

取 $T_0=\frac{1}{C_0(2-k)}\|u_0\|^{2-k}>0$,则 $u(x,T_0)=0$.又由(3.5)知 $\|u\|$ 为 t 的减函数,故当 $t\geqslant T_0$ 时,

$$\|u(x,t)\|\leqslant\|u(x,T_0)\|=0. \qquad (3.7)$$

联合式(3.6)和式(3.7)便得估计式(3.1)和(3.2).且依定义 $u(x,t)$ 在有限时间熄灭.证毕.

参考文献

1 复旦大学数学系.半群方法和非线性发展方程.上海:复旦大学出版社,1987.81~94,183~200.

2 Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Spring-Verlag, 1983, 230~251.

3 Segal I. Nonlinear semigroups. Ann Math, 1963, 78: 339~364.

(责任编辑 蒋汉明)