DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.1996.01.002
广西科学 Guangxi Sciences 1996, 3 (1): 6~8, 38

非齐次线性微分方程亚纯解的零点和极点分布*

On the Distribution of Zeros and Poles of Meromorphic Solutions of Non-homogeneous Linear Differential Equations

王 升
Wang Sheng

(西江大学数学系 广东肇庆 526061)
(Dept. of Math. West River University, Zhaoqing, Guangdong, 526061)

摘要 以 $d(g)$ 表示亚纯函数 $g(z)$ 的增长级;$\lambda(g)$,$\lambda(\frac{1}{g})$ 分别表示 $g(z)$ 的零点、极点序列收敛指数;$\bar{\lambda}(g)$,$\bar{\lambda}(\frac{1}{g})$ 分别表示 $g(z)$ 的不同零点、极点序列收敛指数.定理 **1** 设 $B_j(z)(j=0,1,\cdots,k-1;k\geqslant 1)$ 和 $F(z)$ 为亚纯函数且满足 $d(F)>\max\limits_{j=0,1,\cdots,k-1}\{d(B_j)\}$,又设 $f(z)$ 为 $f^{(k)}+B_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+Bo(z)f=F(z)$ 的一个亚纯函数解.则: (a) 若 $d(f)>d(F)$,则,$\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}=d(f)$. (b) 若 $d(F)$ 为有穷非正整数,则,$\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}\geqslant\max\{\bar{\lambda}(F),\bar{\lambda}(\frac{1}{F})\}$.定理 **2** 设 $R(z),Q(z)$ 为非零亚纯函数,且满足 $\max\{d(Bo),\cdots,d(B_{k-1}),d(Q),\bar{\lambda}(R)\}<d(Y)$.又设 $f(z)$ 为 $f^{(k)}+B_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+Bo(z)f=R(z)+Q(z)\equiv Y(z)$ 的亚纯函数解,则: (a) 若 $d(Y)<\infty$,则,$\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}\geqslant\max\{\lambda(Y),\lambda(\frac{1}{Y})\}$. (b) 若 $d(Y)=\infty$.则 $\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}=\infty$.

关键词 线性微分方程 亚纯解 零点收敛指数 极点收敛指数

Abstract Suppose, $d(g)$ is the order of growth of meromorphic function $g(z)$; $\lambda(g)$, $\lambda(\frac{1}{g})$ are zero-exponent and pole-exponent of convergence of $g(z)$, respectively; $\bar{\lambda}(g)$, $\bar{\lambda}(\frac{1}{g})$ are different zero-exponent and pole-exponent of convergence of $g(z)$, respectively. **Theorem 1** Suppose $B_j(z)$ $(j=0,1,\cdots,k-1;k\geqslant 1)$ and $F(z)$ are meromorphic functions, and satisfy $d(F)>\max\limits_{j=0,1,\cdots,k-1}\{d(B_j)\}$, and suppose $f(z)$ is a meromorphic solution of $f^{(k)}+B_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+Bo(z)f=F(z)$. Then (a) if $d(f)>d(F)$, then, $\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}=d(f)$. (b) if $d(F)$ is finite non-positive integer, then, $\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}\geqslant\max\{\bar{\lambda}(F),\bar{\lambda}(\frac{1}{F})\}$. **Theorem 2** Suppose $R(z),Q(z)$ are non-zero meromorphic solutions, and satisfy $\max\{d(Bo),\cdots,d(B_{k-1}),d(Q),\bar{\lambda}(R)\}<d(Y)$, and suppose $f(z)$ is meromorphic solution of $f^{(k)}+B_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+Bo(z)f=R(z)+Q(z)\equiv Y(z)$. Then (a) if $d(Y)<\infty$, then, $\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}\geqslant\max\{\lambda(Y),\lambda(\frac{1}{Y})\}$. (b) if $d(Y)=\infty$, then, $\max\{\bar{\lambda}(f),\bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}=\infty$.

Key words linear differential equation, meromorphic solution, zero-exponent of convergence, pole-exponent of convergence

我们所考虑的系数为解析函数的线性微分方程解在复域中的振荡性,实际上是解的零点和极点的分布问题[9].自 1982年以来,利用值分布论来研究线性微分方程解的复振荡已变成了一个活跃的领域.非齐次线性微分方程解的复振荡的研究是其中一个重要的方面.对于系数为整函数的情形,已经取得了不少精确的且富有启发性的结果[2~4,6,7].对于系数为有理函数的情形,也取得了一些精确的结果[5].至于系数为一般亚纯函数时,有关这方面进一步的结果尚未多

1995-06-16收稿。
* 国家自然科学基金资助项目 (项目编号 1947103)。

见. 本文主要对这种情形进行了研究, 以 $d(g)$ 表示亚纯函数 $g(z)$ 的增长级; $\lambda(g), \lambda(\frac{1}{g})$ 分别表示 $g(z)$ 的零点、极点序列收敛指数; $\bar{\lambda}(g), \bar{\lambda}(\frac{1}{g})$ 分别表示 $g(z)$ 的不同零点、极点序列收敛指数. 同时, 文中所涉及的亚纯函数的基本定理和标准记号均来自文献 [8], 并且 E, E_1 均表示测度为有穷的 r 值集.

1 主要结果

考虑

$$f^{(k)} + B_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + B_0(z)f$$
$$= F(z) \qquad (1)$$

其中 $B_j(z)\ (j = 0, 1, \cdots, k-1; k \geqslant 1)$ 和 $F(z)$ 为亚纯函数.

定理 1 设 $B_j(z)\ (j = 0, 1, \cdots, k-1; k \geqslant 1)$ 和 $F(z)$ 为亚纯函数且满足 $d(F) > \max\limits_{j=0,1,\cdots,k-1}\{d(B_j)\}$. 又设 $f(z)$ 为 (1) 式的一个亚纯函数解. 则

(a) 若 $d(f) > d(F)$, 则

$$\max\{\bar{\lambda}(f), \bar{\lambda}(\frac{1}{f})\} = d(f).$$

(b) 若 $d(F)$ 为有穷非正整数, 则

$$\max\{\bar{\lambda}(f), \bar{\lambda}(\frac{1}{f})\} \geqslant \max\{\bar{\lambda}(F), \bar{\lambda}(\frac{1}{F})\}.$$

置 $\qquad F(z) = R(z) + Q(z) \equiv Y(z)$,

其中 $R(z), Q(z)$ 均为非零亚纯函数. 则 (1) 变为

$$f^{(k)} + B_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + B_0(z)f$$
$$= R(z) + Q(z) \equiv Y(z) \qquad (2)$$

定理 2 设 $R(z), Q(z)$ 为非零亚纯函数, 且满足 $\max\{d(B_0), \cdots, d(B_{k-1}), d(Q), \bar{\lambda}(R)\} < d(Y)$. 又设 $f(z)$ 为 (2) 式的亚纯函数解. 则

(a) 若 $d(Y) < \infty$. 则

$$\max\{\bar{\lambda}(f), \bar{\lambda}(\frac{1}{f})\} \geqslant \max\{\lambda(Y), \lambda(\frac{1}{Y})\}.$$

(b) 若 $d(Y) = \infty$. 则 $\max\{\bar{\lambda}(f), \bar{\lambda}(\frac{1}{f})\} = \infty$.

2 有关引理

引理 1 设 $B_j(z)\ (j = 0, 1, \cdots, k-1; k \geqslant 1)$ 和 $F(z)$ 如定理 1 所设. 又设 $f(z)$ 为 (1) 式的一个有穷级亚纯解. 则

$$\max\{\bar{\lambda}(f), \bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}, d(B_0), \cdots, d(B_{k-1})\}$$
$$\geqslant \max\{\bar{\lambda}(F), \bar{\lambda}(\frac{1}{F})\}.$$

证明 由 (1) 式得

$$f/F = (f^{(k)}/f + B_{k-1}(z)f^{(k-1)}/f + \cdots, + B_0)^{-1}$$

应用 Nevanlinna 理论于上式得到以下二式.

$$m(r,f) \leqslant m(r,f) + O\{\bar{N}(r,f) + \bar{N}(r,\frac{1}{f})\} + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j) + S(r,f);$$

$$T(r,F) \leqslant T(r,f) + O\{\bar{N}(r,f) + \bar{N}(r,\frac{1}{f})\} + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j) + S(r,f).$$

把以上二式相加, 则得到

$$N(r,F) \leqslant O\{\bar{N}(r,f) + \bar{N}(r,\frac{1}{f}) + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j) + \log r\}.$$

因此, 有

$$\max\{\bar{\lambda}(f), \bar{\lambda}(\frac{1}{f}), d(B_0), \cdots, d(B_{k-1})\}$$
$$\geqslant \lambda(\frac{1}{F}).$$

另一方面, 由 (1) 式得

$$f^{(k)}/f + B_{k-1}f^{(k-1)}/f + , \cdots, + B_0 = F/f \qquad (3)$$

应用 Nevanlinna 理论于 (3) 式得到

$$m(r,\frac{1}{f}) \leqslant m(r,\frac{1}{F}) + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j) + S(r,f);$$

$$T(r,\frac{1}{F}) \leqslant T(r,\frac{1}{f}) + O\{\bar{N}(r,f) + \bar{N}(r,\frac{1}{f})\} + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j) + S(r,f).$$

把以上二式相加, 易得

$$N(r,\frac{1}{F}) \leqslant O\{\bar{N}(r,f) + \bar{N}(r,\frac{1}{f}) + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j) + \log r\}.$$

于是得到

$$\max\{\bar{\lambda}(f), \bar{\lambda}(\frac{1}{f})\}, d(B_0), \cdots, d(B_k)\}$$
$$\geqslant \lambda(F).$$

这就完成了引理 1 的证明.

引理 2 设 $f(z)$ 为有穷级亚纯函数. 若 $d(f)$ 为非正整数, 则

$$d(f) = \max\{\lambda(f), \lambda(\frac{1}{f})\}$$

证明 据文献 [8] 中的定理 1.9, $f(z)$ 可写为

$$f(z) = Z^p\frac{\Pi_1(z)}{\Pi_2(z)}e^{P(z)},$$

其中 $\Pi_1(z), \Pi_2(z)$ 分别为由 $f(z)$ 的非零零点列和极点列所形成的典型乘积, $p \geqslant 0$ 为整数, $P(z)$ 为多项式且其次数 $\deg P(z) \geqslant 0$. 因为 $\lambda(f) = \lambda(\Pi_1), \lambda\frac{1}{f} = \lambda(\Pi_2)$, $d(\Pi_j) = \lambda(\Pi_j)\ (j = 1, 2)$. 故 $d(\Pi_j) \leqslant d(f)$. $(j = 1, 2)$. 又

$$T(r,e^P) \leqslant T(r,f) + \sum_{j=1}^{2}T(r,\Pi_j) + O(\log r).$$

因为 $d(f)$ 是非正整数. 故 $d(f) > d(e^P) = \deg P$. 另外

$$T(r,f)\leqslant \sum_{j=1}^{2} T(r,\Pi_j)+ T(r,e^P)+ O(\log r).$$

综上所述,即证明了引理 2.

类似于文献 [10]中的定理 2. 2的证明方法,易证得

引理 **3** 设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数,$a_1(z)$,$a_2(z)$ 为二判别亚纯函数且满足 $\max\{\mathrm{d}(a_1),\mathrm{d}(a_2)\} < \mathrm{d}(f)$,则

$$T(r,f)\leqslant \overline{N}(r,f)+ O\{\sum_{j=1}^{2}[\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j}) + T(r,a_j)]\}+ S(r,f).$$

引理 **4**[1] 若 $F(r)$和 $G(r)$为 $(0,\infty)$上的非减函数且满足 $F(r)\leqslant G(r)$, $r\notin E$,其中 E至多为一个测度为有穷的 r值集.则对于任意常数 $\mathrm{T}>1$,存在 $r_0>0$使得当 $r>r_0$时有 $F(r)\leqslant G(\mathrm{T}r)$.

3 定理 1的证明

(a) 对 (3) 式应用 Nevanlinna理论得

$$T(r,f)\leqslant O\{T(r,F)+ \overline{N}(r,f)+ \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j)\}, r\notin E \qquad (4)$$

据引理 4并注意到 $\overline{\lambda}(f)\leqslant \mathrm{d}(f)$, $\overline{\lambda}(\frac{1}{f})\leqslant \mathrm{d}(f)$ 及 $\mathrm{d}(F) > \max\limits_{j=0,1,\cdots,k-1}\{\mathrm{d}(B_j)\}$,即可证得定理 1$(a)$.

(b) 若 $\max\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}(\frac{1}{f})\} = \infty$.则结论显然成立.若 $\max\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}(\frac{1}{f})\} <\infty$,则由 (4) 式易知 $\mathrm{d}(f) <\infty$.再由引理 1知

$$\max\{\mathrm{d}(B_0),\cdots,\mathrm{d}(B_{k-1}),\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}(\frac{1}{f})\}$$
$$\geqslant \max\{\lambda(F),\lambda(\frac{1}{F})\}.$$

据引理 2,易证得定理 1(b).

定理 1证明完毕.

4 定理 2的证明

(a) 若 $\mathrm{d}(f) = \infty$.则类似定理 1(a) 的证明,由 (2) 式得

$$T(r,f)\leqslant O\{T(r,Y)+ \overline{N}(r,f)+ \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j)\}, r\notin E \qquad (5)$$

据引理 4,可由 (5) 式推出

$$\max\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}(\frac{1}{f})\} = \infty > \mathrm{d}(Y)$$
$$\geqslant \max\{\lambda(Y),\lambda(\frac{1}{Y})\}.$$

若 $\mathrm{d}(f) <\infty$.由引理 1有

$$\max\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}(\frac{1}{f}),\mathrm{d}(B_0),\cdots,\mathrm{d}(B_{k-1})\}$$
$$\geqslant \max\{\overline{\lambda}(Y),\overline{\lambda}(\frac{1}{Y})\}.$$

置 $a_1(z)\equiv Q(z)$, $a_2(z)\equiv 0$.则由引理 3有

$$T(r,Y)\leqslant \overline{N}(r,Y)+ O\{\overline{N}(r,\frac{1}{Y})+ \overline{N}(r,\frac{1}{R}) + T(r,Q)\}+ S(r,Y).$$

于是不难推出

$$\max\{\lambda(Y),\lambda(\frac{1}{Y})\} = \mathrm{d}(Y).$$

故命题成立.

(b) 类似于引理 1的证明,由 (2) 式可推出

$$\max\{N(r,Y),N(r,\frac{1}{Y})\}$$
$$\leqslant O\{\overline{N}(r,f)+ \overline{N}(r,\frac{1}{f})+ \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j) + \log r T(r,f)\}, r\notin E \qquad (6)$$

我们断定

$$\max\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}(\frac{1}{f})\} = \infty.$$

否则,假设 $\max\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}(\frac{1}{f})\} <\infty$.置 $a_1(z)\equiv Q(z)$, $a_2(z)\equiv 0$.由引理 3可得

$$T(r,Y)\leqslant O\{\overline{N}(r,Y)+ \overline{N}(r,\frac{}{Y})+ \overline{N}(r,\frac{1}{R}) + T(r,Q)\}, r\notin E \qquad (7)$$

由 (5), (6), (7) 式得

$$T(r,f)\leqslant O\{\overline{N}(r,\frac{1}{R})+ \overline{N}(r,f)+ \overline{N}(r,\frac{1}{f}) + \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j)+ T(r,Q)\}, r\notin E_1\cup E.$$

据引理 4,由上式可推出

$$\mathrm{d}(f) <\infty.$$

现在,应用 Nevanlinna理论于 (2) 式可得

$$T(r,Y)\leqslant O\{T(r,f)+ \sum_{j=0}^{k-1}T(r,B_j)+ \log r\}.$$

由此推出

$$\mathrm{d}(Y) <\infty.$$

矛盾于题设.

定理 2证明完毕.

参考文献

1 Bank S. A general theorem concerning the growth of solutions of first-order algebraic differential equations, Compositio Math. 1972, 25: 61~ 70.

2 陈特为 . 一类非齐次线性微分方程的复振荡 . 科学通报, 1990, (9): 713~ 714.

3 陈宗宣, 高宗升 . 非齐次线性微分方程解的复振荡 . 数学学报, 1992, 53 (2): 196~ 203.

(下转第 38页 Continue on page 38)

Sepharose 6B亲和层析柱,结果显示纯化效果二者相差不大。白桂木、红桂木与木菠萝同属桂木属，红细胞的凝集作用都受 GalNAc和 Gal抑制,我们用 Gal-Sepharose 6B分离纯化白桂木和红桂木，结果也较好。因此 Gal-Sepharose 6B是一种分离纯化 GalNAc和 Gal糖特异性凝集素较好的一种亲和吸附剂。Ahmed等[3]报道 Jacalin分子量为42 000,由4个相同的分子量为 11 400的亚基组成的四聚体。而 Aucouturier等[4]报道 Jacalin分子量为54 000,由3个分子量为12 000的亚基和1个分子量为15 000的亚基组成的四聚体。我们的结果与前者有一定差异，而和 Aucouterier报道的相似。这种差异可能是由于木菠萝产地不同,品种差异致使凝集素的组成有差异之故。PAGE显示纯化的凝集素主要为一区带，但等电聚焦电泳 Jacalin确实出现6条区带，显示出不均一性。可能的原因是：其一，该凝集素由两种不同的亚基构成,在组成四聚体时可能有多种组合,但由于亚基分子量相差不大,从总的分子量反映不出它们的差异；其二，可能存在同工凝集素。故在 PAGE上还不能显示但在分辨率高的等电聚焦电泳就显示出来了。氨基酸组分分析表明 Jacalin不含 Met，Cys含量极低,SDS-PAGE中,加或不加巯基乙醇均可使凝集素亚基解离,这表明各亚基之间以非共价键结合的。

凝集素在临床医学上有很大应用潜力。通过对木菠萝凝集素纯化及性质的研究,可为对其作进一步研究提供基础资料。

参考文献

1 孙 册,朱 政,莫庆汉等主编.凝集素.北京：科学出版社，1988. 117~ 133.

2 Vijayakumar T, Forrester T A. Purification and physicochemical properties of lectins from the Jack Fruit (Artocarpus integrifolia). Biologia Plantarum (PRAHA), 1986, 28 (5): 370~ 374.

3 Ahmed H, Chatterjee B P. Further Characterization and immunochemical studies on the carbohydrate specificity of Jack Fruit (Artocarpus integrifolia) lectin. The Journal of Biological Chemistry. 1989, 264 (16): 9365~ 9371.

4 Aucouturier P, Mihaesco E, Mihaesco C et al. Characterization of Jacalin, the human IgA and IgD binding lectin from Jack Fruit. Molecular Immunology. 1987, 24 (5): 503~ 511.

5 Matsumoto I, Mizuno Y, Seno N. Activation of sepharose with epichlorohydrin and subsequent immobilization of ligand for affinity adsorbent J Biochem. 1979, 85 1091~ 1098.

6 何忠效,张树政主编.电泳.北京：科学出版社，1990. 20 ~ 38.

7 李士鹏,王锦兰,胡纫秋.一种简便的薄层等电聚焦分析电泳装置．生物化学与生物物理进展，1984, (2): 72~ 74.

8 张龙翔主编.生物化学实验技术.北京：人民教育出版社，1988. 124~ 132.

9 徐秀璋主编.蛋白质顺序分析技术.北京：科学出版社，1988. 95~ 97.

10 Matsumoto I, Kitagaki H, Akaiy et al. Derivatization of epoxy-activated agarose with various carbohydrates for the preparation of stable and high-capacity affinity adsorbents: Their use for affinity chromatography of carbohydrate-binding proteins. Anal Biochem. 1981, 116 103~ 110.

(责任编辑 蒋汉明 邓大玉)

(上接第8页 Continue from page 8)

4 Chen Zong-xuan, Gao Shi-an. The complex oscillation theory of certain non-homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients, J. Math Analy App, 1993, 179 (2): 403~ 416.

5 Chen Zong-xuan, Gao Shi-an, On the complex oscillation of non-homogeneous linear differential equations with meromorphic coefficients. Kodai Math J, 1992, 15, (1): 65~ 78.

6 Gao Shi-an, On the complex oscillation of solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients. Comment Math Univ St Paul, 1989, 38 (1): 11~ 20.

7 Gao Shi-an, Two theorems on the complex oscillation theory of non-homogeneous linear differential equations. J Math Analy App, 1991, 162 (2): 381~ 391.

8 Hayman W. Meromorphic functions, Amen House, London E. C. 4 Oxford University Press, 1964. 21~ 24.

9 Hille E. John Wiley & Sons, Inc. 1976.

10 庄圻泰,杨重骏.亚纯函数的不动点与分解论.北京：北京大学出版社，1988. 52.

(责任编辑 蒋汉明)