DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.1995.04.004

广西科学 Guangxi Sciences 1995，2（4）：15～16

关于σ-局部可数弱基*

On σ-locally Countable Weak Bases

宣泽永 Xuan Zeyong　　熊　文 Xiong Wen

（广西大学数学与信息科学系　南宁市西乡塘路　530004）（广西交通学校　南宁市园湖路　530023）

(Dept. of Math . & Inf's Sci. Guangxi University, Xixiangtang Road, Nanning, Guangxi, 530004)　(Traffic School of Guangxi, Yuanhu Road, Nanning, Guangxi, 530023)

摘要　证明如下主要定理：(1) σ-局部可数弱基在开、闭 Lindelöf 映射下保持. (2) 设 X、Y 有 σ-局部可数弱基，则 $X\times Y$ 为 k-空间的充分必要条件是下列之一满足：(a)X 和 Y 有 σ-局部可数基，(b)X 或 Y 为局部紧度量空间，(C)X、Y 有一 σ-局部有限且由紧子集构成的弱基.

关键词　弱基　σ-局部可数　开映射　闭 Lindelöf　映射　S_2

Abstract　Two main theorems are proved: (1) A σ-locally countable weak base is preserved under open and closed Lindelöf mappings. (2) Suppose that both X and Y have a σ-locally countable weak base then $X\times Y$ is a k-space if the following holds: ①Both X and Y have a σ-locally countable base. ② X or Y is a locally compact and metrizable space. ③ Both X and Y have a σ-locally countable weak base formed by compact subsets.

Key words　weak base, σ-locally countable , open maps, closed Lindelöf maps, S_2

弱基的概念是由前苏联著名拓扑学家 Arkhangel'skii，A. V 所引进的，近年来许多关于弱基的结果被中外拓扑学家所获得，但仍有许多问题没有解决. 人们已知 g-第二可数的完全映射像不是 g-第一可数，但不知 σ-局部可数弱基在开、闭 Lindelöf 映射下是否保持，本文将证明回答是肯定的，同时给出两个具有 σ-局部可数弱基的拓扑空间乘积是 k-空间的充分必要条件.

定义 1　空间 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的弱基，如果对于每一 $x\in X$，存在 $\mathscr{B}_x\subset\mathscr{B}$ 使 (1) $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_x: x\in X\}$；(2) $x\in\bigcap\mathscr{B}_x$；(3) 若 U、$V\in\mathscr{B}_x$，则存在 $W\in\mathscr{B}_x$ 使 $W\subset U\cap V$；(4) X 的子集 G 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $x\in G$，存在 $B\in\mathscr{B}_x$ 使 $B\subset G$.

定义 2　在定义 1 中，如果每一 $\mathscr{B}_x$ 是可数的，称 X 是 g-第一可数空间.

定义 3　$\mathscr{P}$ 称为空间 X 的 CS-网，如果对于每一个收敛于点 x 的收敛序列 $\{x_n: n\in N\}$ 和 x 的任一邻域 U，都存在 $P\in\mathscr{P}$ 和 $m\in N$ 使得 $\{x\}\cup\{x_n: n\geqslant m\}\subset P\subset U$.

本文所讨论的空间都是正则 T_1 的，映射都是连续到上的，S_2 是 Aren's 空间，S_w 表示序列扇空间.

定理 1　具有 σ-局部可数弱基的空间 X 有 σ-局部可数基的充分必要条件是它不含有 S_2 的拷贝.

证　必要性是显然的.

充分性　由文献 [1] 中引理可知，X 有点 G_δ 性质，再由文献 [2] 命题 1.20 可知，X 是 Fréchet 空间，而 Fréchet g-第一可数空间为第一可数的，由文献 [1] 可知 X 有 σ-局部可数基.

定理 2　开、闭 Lindelöf 映射保持 σ-局部可数弱基.

为证定理 2，首先我们需要以下几个引理.

引理 1（文献 [3] 定理 1）　设 X 为 k-空间，且有点可数闭 k-网，X 有点 G_δ 性质，则 X 为 g-第一可数的充要条件是它不含有 S_W 的拷贝.

引理 2（文献 [4] 引理 1.7）　设 X 是 g-第一可数的，若 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 CS-网且在有限交下封闭，则 $\mathscr{P}$ 的某个子簇是 X 的弱基.

引理 3（文献 [5] 引理 4.4）　设 $f: X\to Y$ 是开闭映射，X 有点 G_δ 性质，若 Y 含有 S_W 的拷贝，则

1995-03-27 收稿。

* 广西区教委基金资助项目。

X 也含有 S_W 的拷贝.

引理 4 开、闭 Lindelöf 映射保持 σ -局部可数的 CS -网.

证 设 $f: X\to Y$ 为开、闭 Lindelöf 映射，$\mathscr{P}$ 为 X 的 σ -局部可数 CS -网，则 $f(\mathscr{P})=\{f(P): P\in\mathscr{P}\}$ 为 Y 的局部可数族. 往证 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 的 CS -网，设 $\{y_k: k\in N\}\subset Y$，$y_k\to y\in U$，U 是 y 的开邻域，取 $x\in f^{-1}(y)$. 由文献［1］可知 X 有点 G_δ 性质，则有 x 的开邻域列 $\{W_n: n\in N\}$ 满足 $\bigcap_{n\in N}W_n=\{x\}$ 且对 $n\in N$ 有 $\overline{W}_{n+1}\subset W_n$，不妨设 $W_1=X$，由于 f 是开映射，则 $f(W_n)$ 是 y 的邻域 $(n\in N)$. 若 $y_k\in f(W_1)-f(W_2)$，则取 $x_k\in f^{-1}(y_k)\cap W_1$，若 $y_k\in f(W_2)-f(W_3)$ 则取 $x_k\in f^{-1}(y_k)\cap W_2$，…，若 $y_k\in f(W_n)-f(W_{n+1})$ 则取 $x_k\in f^{-1}(y_k)\cap W_n$，…这样我们可选出 $\{x_k: k\in N\}$，下面我们证明 $x_k\to x$. 由于 f 是闭映射，容易看出 $\{x_k: k\in N\}$ 的任何子列都有丛点，并且 x 是这些子例唯一的丛点，(因为 $\bigcap W_n=\bigcap\overline{W}_n=\{x\}$，从而 $x_k\to x$. 由于 $x\in f^{-1}(U)$，$\mathscr{P}$ 为 X 的 CS -网，故存在 P 使 $x\in P\subset f^{-1}(U)$ 且 $\{x_k\}$ 终于 P，故 $y\in f(P)\subset U$，$\{y_k=f(x_k)\}$ 终于 $f(P)$ 从而 $f(P)$ 是 Y 的 CS -网.

定理 2 的证明 设 $f: X\to Y$ 为开、闭 *Lindelöf* 映射，由引理 4 知 Y 有 σ -局部可数 CS -网，由引理 3 可知 Y 不含有 S_W 的拷贝，再由引理 1 知 Y 是 g -第一可数的，从而 Y 有 σ -局部可数弱基（引理 2).

定理 3 设 X、Y 有 σ -局部可数弱基，则 $X\times Y$ 为 k -空间的充分必要条件是下列结论之一成立① X、Y 有 σ -局部可数基；② X 或 Y 是局部紧度量空间；③ X、Y 有 σ -局部有限由紧子集构成的弱基.

证 充分性是显然的，这里注意到文献［6］中定理 2.4 即可.

必要性 ①若 X、Y 均不含有 S_2 的拷贝，由定理 1 可知，X、Y 有 σ -局部可数基.

② X、Y 有一个不含 S_2 的拷贝，不妨设 Y 不含有 S_2 的拷贝，则 $S_2\times Y$ 为 k -空间，由于 S_W 为 S_2 的完备映射像，故 $S_w\times Y$ 为 k -空间，由文献［7］中引理 2 可知，Y 中每一第一可数紧子集是局部紧的，从而 Y 是局部紧的，再由于局部紧有 σ -局部可数基的空间是可度量的，故 Y 为局部紧度量空间.

③若 X、Y 均含有 S_2 的拷贝，由情形②证明可知 X、Y 中的每一第一可数子集都是局部紧的，再由文献［4］中引理 2.5 证明可知，X、Y 有 σ -局部可数由紧子集构成的弱基，从而 X、Y 有一紧可数弱基. 设 X 的紧可数弱基为 $\mathscr{P}$，在 X 上定义一个等价关系：$A, B\in\mathscr{P}$，若 $A\sim B$ 则存在 $C_1\cdots C_n$，使 $A\cap C_1\neq\varnothing$ $C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ $C_n\cap B\neq\varnothing$，这样 X 可表为由可数的紧子集构成的弱基空间的拓扑和，从而 X 有一 σ -局部有限的，由紧子集构成的弱基，同理 Y 也有一 σ -局部有限的，且由紧子集构成的弱基.

参考文献

1 刘 川，宣泽永，谷建胜. 关于 σ -局部可数基. 广西科学，1994，(2)：5～6.

2 Tanaka Y. Metrization Ⅰ: topics in general topology, Eds by Morita K, Nagata J. north-Holland, 1989, 275～314.

3 Liu C, Dai M, g-metrizability and S_W Top. 1994, 60: 185～189.

4 Lin S., Tanaka Y, Point - countable K - network closed maps, and related results. Top Appl. ～

5 Liu C, Dai M. Spaces with a locally countable weak base, Math Japonica. 1995, 41 (2): 261～267.

6 Liu C. Spaces with σ - hereditarily closure preserving K - network. Top proc, 1993, 18: 1～10.

7 Gruenhage G, K - spaces and products of closed Images of metric spaces. Proc Amer Math Soc, 1980, 80: 478～482.

（责任编辑：蒋汉明 邓大玉）