

岩质高边坡稳定分析中的抗 剪强度参数的概率统计方法*

Statistical Method of Shear Strength Parameters in the Stability Analysis of Rocky High Hillside

光耀华

Guang Yaohua

(广西电力工业勘察设计院 南宁市建政路 10 号 530023)

(Guangxi Institute on Exploration and Design of Electropower and
Industrial projects, 10 Jianzheng Road, Nanning, Guangxi, 530023)

摘要 本文广泛运用概率论和数理统计的原理研究岩体抗剪强度试验指标的统计方法和取值原则,形成一完整的软件系统。文中叙述了各分立软件的功能和计算方法。

关键词 抗剪强度 参数 概率 统计 分布 岩质边坡稳定

Abstract Principles of probability and statistics were applied to research the statistical method and fetching value of test indexes of Rock shear strength. A software system was formed and its function and calculating method were discussed.

Key words shear strength, parameter, probability, statistics, distribution, rocky slope stability.

1 前言

在岩质高边坡及坝基稳定分析中,抗剪强度参数(摩擦系数 f 和凝聚力 c)是设计的重要指标。该指标的取值正确与否,关系到工程的安全性及经济性。抗剪强度试验通常在拟定的工程地质单元体采集样本,在室内或现场直接进行。对于大中型工程,一般以现场试验为主。每组试块 4~5 个,每块剪切面积不少于 50×50 cm,尽管如此,由于试验场地的环境条件(包括岩性、岩体结构、风化程度、裂隙发育程度,岩石强度)的差异,致使同一单元体内的各组试验指标呈现明显的离散性。同时,测试过程中也可能存在随机误差。因此,必须把样本的试验数据作为随机变量,按照数理统计的方法进行统计分析,以取得参数的系列特征值,并进行分布律检验。本软件系统广泛的应用了概率论的基本知识,处理抗剪强度参数的基本值、统计值、标准值和设计值。主要内容有:

(1) 基于库仑准则对 f 、 c 值进行线性拟合,并作相关性检验和 F 检验;

(2) 按幂函数方程对 f 、 c 进行非线性拟合,并作相关性检验和 F 检验;

(3) 对混凝土与坚硬岩石接触面的抗剪强度参数,要考虑混凝土强度的差异作非线性拟合;

(4) 原始试验数据的预处理,采用 Grubbs 准则和最优分割法进行优化,删去首尾突变值;

(5) 计算抗剪强度参数的系列特征值(包括均值、标准差、变异系数),分布律检验(χ^2 法、K-S法、A-D法并用),绘制概率密度、概率分布曲线图,并计算超越概率;

(6) Monte Carlo 随机抽样统计,是在已知母体的理论概率分布模式和统计特征值以后,由计算机随机抽样,在一定程度上弥补单元体子样数量的不足;

(7) Bayes 法则的运用。把“经验”和“试验”结合起来,采用全概率公式可以计算“后验概率”,据以推算大概率参数,即所谓参数预测;

(8) 用 β 分布的概率密度函数逼近实测数据,可以获得较好的经验分布,它优于用正态分布拟合时夸大了尾部概率;

(9) 用二元随机变量的联合分布求给定值的超越概率;

(10) 按水工设计统一标准推荐的方法计算抗剪

1994-11-21 收稿。

* 国家计委“八五”攻关项目科研成果。

强度的标准值和设计值。

上述各种方法集成了一个系统,即 SHEAR - 92 系统,由 4 个模块组成,每个模块内又分立若干个小模块。系统说明中阐述了各种方法的数学模型、计算步骤及示范算例,为抗剪强度参数的正确取值奠定了基础。

2 单元体 f, c 的基本值

2.1 f, c 值的线性拟合

岩石抗剪(断)试验是在不同的法向应力 p_1, p_2, p_3, \dots 作用下得到相应的剪应力值 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, 如果每组试件用 k 个试样在 k 个不同垂直压力作用下剪切,当一个工程地质单元体有 n 组试验,则共有 $m = n \times k$ 对 P, τ 数据,在一般应力水平下,通常假定库仑强度包线是一条直线,抗剪试验成果可按线性回归方程进行整理,计算包线上的 f, c 参变量,即:

$$\tau_i = f p_i + c + \varepsilon_i (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

式中, τ_i — 在 p_i 正应力下的剪应力值; p_i — 第 i 试块正应力值; f — 摩擦系数; c — 凝聚力; ε_i — 随机扰动量,是相对于回归直线的误差值。采用最小二乘法求解线性回归参数 f, c 值要求相对于回归直线 ε_i 的绝对值的平方和为最小。同时,假定 ε_i 相对于回归直线服从正态分布。根据线性方程相加(减)时概型不变的原理, c 及 f 的概率分布函数也应是正态分布,因此,采用此种方法计算 c, f 值可不再进行概型检验。即认为 f, c 的随机变量均服从正态分布。

经过线性回归方程运算后可得出如下各值:

(1) 回归方程标准差 σ :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\tau_i - f p_i - C)^2}{m - 2}} \quad (2)$$

(2) τ 与 P 的相关系数 $\gamma_{\tau, P}$:

$$\gamma_{\tau, P} = \frac{m \sum \tau P - \sum \tau \sum P}{\sqrt{[m \sum \tau^2 - (\sum \tau)^2] \cdot [m \sum P^2 - (\sum P)^2]}} \quad (3)$$

(3) 摩擦系数 f 及凝聚力 C 的均值:

$$\bar{f} = (m \sum \tau P - \sum \tau \sum P) / \Delta \quad (4)$$

$$\bar{C} = (\sum \tau \sum P^2 - \sum P \cdot \sum \tau P) / \Delta \quad (5)$$

(4) f 及 c 的标准差:

$$\sigma_f = \sigma \sqrt{(m/\Delta)} \quad (6)$$

$$\sigma_c = \sigma \sqrt{(\sum P^2)/\Delta} \quad (7)$$

(5) f 与 c 的协方差 $C_{ov}(f, c)$:

$$C_{ov}(f, c) = -\bar{p}(\frac{\sigma^2}{\Delta}) \quad (8)$$

式中, \bar{P} — 正应力的均值,

$\Delta = m \sum P^2 - (\sum P)^2$, m — 试件总数。

(6) f 与 c 的相关系数 $\gamma_{f, c}$:

$$\gamma_{f, c} = \frac{C_{ov}(f, c)}{\sigma_f \cdot \sigma_c} \quad (9)$$

(7) 对相关系数进行显著性检验(F 检验):

$$F = \frac{(\gamma_{f, c})^2}{1 - (\gamma_{f, c})^2} (m - 2) \quad (10)$$

统计量 F 是具有自由度 $(1, m - 2)$ 的 F 分布,在给定的信度 α , 计算的 F 值与 F 分布表的 $F_\alpha(1, m - 2)$ 值进行比较,若 $F > F_\alpha(1, m - 2)$, 则两变量之间的线性相关是明显的,反之则不存在相关关系。

2.2 f, c 值的非线性拟合

对于坚硬的裂隙岩体,其抗剪强度与正应力之间往往呈非线性关系,可用指数方程,幂函数方程和对数方程进行回归,计算待定系数 $a \cdot b$ 值。然后选择相关系数最大值的方程作为拟合方程,设定小应力区的 10 级正应力 $P(P = 0.1, 0.2, \dots, 1.0)$ 代入拟合方程计算相应的剪应力 $\tau(\tau = 0.1, 0.2, \dots, 1.0)$, 再用库仑方程进行第二次回归,计算 f, c 值,并进行精度评定。

(1) 指数方程

$$\tau = a \cdot e^{b \cdot P} \quad (11)$$

将两边取对数:

$$\ln \tau = \ln a + b P$$

代入线性方程组 $\tau = a + b p$

则

$$b = \frac{m \sum (P \cdot \ln \tau) - \sum P \sum \ln \tau}{m \sum P^2 - (\sum P)^2}$$

$$a = \exp[(\sum \ln \tau - b \sum P)/m]$$

式中, m — 试件总数

(2) 幂函数方程

$$\tau = a \cdot P^b \quad (12)$$

将两边取对数后化为线性方程求解待定系数 a, b 值。

$$\ln \tau = \ln a + b \ln P$$

则

$$b = \frac{m \sum (\ln P \cdot \ln \tau) - \sum \ln P \cdot \sum \ln \tau}{m \sum (\ln P)^2 - (\sum \ln P)^2}$$

$$a = \exp[(\sum \ln \tau - b \sum \ln P)/m]$$

(3) 对数方程

$$\tau = a + b \ln P \quad (13)$$

令 $P' = \ln P$ 化为 $\tau' = a + bP'$ 求解

$$b = \frac{m \sum (\ln P \cdot \tau) - \sum \ln P \cdot \sum \tau}{m \sum \ln P^2 - (\sum \ln P)^2}$$

$$a = (\sum \tau - b \sum \ln P) / m$$

2.3 考虑混凝土强度拟合混凝土/岩石接触面的 f 、 c 值

在现场进行混凝土/岩石抗剪断试验时,往往发现混凝土试件强度与下部岩石强度的差异明显地影响其抗剪断指标。对于坚硬岩石,当岩石强度远大于混凝土强度时,破坏面一般沿混凝土与基岩接触面展开,甚至局部剪断了上部试块,而当岩石软弱时,则迁就岩石裂隙剪断了岩块。某工程做了对比试验,在岩性、试件尺寸和起伏差均相同的情况下, C_{30} 混凝土比 C_{15} 混凝土抗剪断强度大 40 ~ 57%。由于坚硬岩石强度一般在 60 MPa 以上,而混凝土强度一般为 10 - 30 MPa,在此情况下,地质上的微小差异可以忽略,而着重考虑上部混凝土强度对抗剪断指标的影响。这里采用回归分析方法,将每一加荷量级的垂直应力 P 和水平剪力 τ 均除以混凝土标号 R_c ,从而使试验成果标准化,用线性、指数、幂函数、双曲线和对数五种回归方程进行拟合,计算待定系数 a, b 值及标准差与相关系数,从中优化选用标准差最小、相关系数最大的幂函数方程为混凝土与坚硬岩石的破坏方程:

$$\text{即: } \tau/R_c = a \cdot (P/R_c)^b$$

$$\text{或: } \tau = a \cdot P^b \cdot R_c^{(1-b)} \quad (14)$$

式中, τ —剪应力, P —正应力, R_c —混凝土强度, a, b —回归系数。计算方法同于 2.2。当得出 a, b 值后,设定混凝土标号 R_c 从 10 到 30 MPa,采用 5 个量级,取试验应力范围内近于直线段的点子,正应力和剪应力均分 20 级,每级 0.2 MPa 代入各回归方程计算 P 值和 τ 值,然后用库仑方程回归可得到不同混凝土标号下的 f, c 值。显然,这里的 f, c 值随混凝土强度增大而增大,而其标准差较常规方法计算结果要小,因此精度较高,这一研究结果提示我们,对于坚硬岩体的坝基,适当提高坝底混凝土标号,可以提高抗剪参数或直接采用混凝土的 C 值。

3 统计分析

3.1 数据预处理—优化分析

取自一个工程场地或区域性大母体的现场抗剪试验原始数据,离散性较大,常混杂一些奇异值,这些不符合规律性的奇异值可能来源于测试误差,也可能由于试件的代表性问题—即试件脱离总体特征而

仅反映局部特征。如果不对原始数据进行误差处理,则所统计的参变量就会失真,因此,需要采用一定的方法对数据进行预处理。这里提出用格鲁包斯(Grubbs)方法剔除试验中的异常值,然后用最优分割法将正常数据进行分割,选择总体变差最小且比较集中的数据进行数字特征计算,以求得可靠的参变量。

格鲁包斯方法是对异常数据进行统计判别的一种方法。其基本思想为,给定一危险率(如 $\alpha = 0.05$),确定相应的置信限,凡超过这个界限的误差,就认为是不可容许误差,它不属于随机误差范畴,应予剔除。

设试验数据 x 服从正态分布(非正态分布可正态当量化),当满足:

$$x_i > \bar{x} + t_\alpha(n, \alpha) \cdot \sigma$$

$$\text{或 } x_i < \bar{x} - t_\alpha(n, \alpha) \cdot \sigma$$

此 x_i 即为奇异值,应予以剔除。

式中, x_i —随机变量, \bar{x} —均值, $t_\alpha(n, \alpha)$ —当统计样本为 n 、危险率为 α 时的临界值, σ —标准差。

最优分割法或称有序聚类分析法就是对观测或试验数据进行分割,分割点使得各段内试验数据的差异最小,而各段之间的差异最大。然后选取最优分割数据集中心段进行参数特征值统计。这里介绍最优二分法。

设有一组有序试验数据为:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

当进行二分割时,分法有 $n - 1$ 种

以 x_1 为分点: $\{x_1\}, \{x_2, \dots, x_n\}$

以 x_2 为分点: $\{x_1, x_2\}, \{x_3, \dots, x_n\}$

以 $n - 1$ 为分点: $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}, \{x_n\}$

要寻找 $n - 1$ 种分法中最优者,即计算 $n - 1$ 种分法中所对应的总变差最小者即可。

分段 $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_j\}$ 的总变差为:

$$d_{ij} = \sum_{k=i}^j (x_k - \bar{x}_{ij})^2$$

$$\text{式中 } \bar{x}_{ij} = \frac{1}{j - i + 1} \sum_{k=i}^j x_k$$

记 $S_n(2, j)$ 为 n 个样品在第 j 点进行二分割的总变差,则 $n - 1$ 种分割中的总变差为:

$$S_n(2, 1) = d_{11} + d_{2n}$$

$$S_n(2, 2) = d_{12} + d_{3n}$$

.....

$$S_n(2, n - 1) = d_{1, n-1} + d_{nn}$$

$$\text{显见: } d_{11} = d_{22} = \dots = d_{nn} = 0$$

设 $j = k_1$ 时, $S_n(2, j)$ 达到最小值,即

$$S_n(2, k_1) = \min S_n(2, j) \quad (1 \leq j \leq n - 1)$$

则最优二分分割为: $\{x_1, \dots, x_k\}, \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$

接下去是进行最优三分割,最优三分割是在最优二分分割的基础上进行,可得出:

$\{x_1, x_2, \dots, x_k\}, \{x_{k+1}, \dots, x_{k_2}\}, \{x_{(k_2+1)}, \dots, x_n\}$ 如此类推继续下去,即反复计算分割数为 2, 3, 4, \dots 的总变差最小值,直至预先给出的分割数 H 为止。最后,选择最优分割区间数据集集中段,计算参数的特征值,即均值、标准差、变异系数及置信概率为 α 的区间估计值。

3.2 抗剪强度参数系列特征值

3.2.1 功能及计算方法

一个统计单元体称为总体(母体),组成总体的每个单元称为个体。要了解总体的性质,就必须对其中的个体进行全面的观测和试验。但是,在很多情况下是不可能或者是不经济的。因此,只能从总体中抽取部分个体(称为样本)进行观测和试验,取得样本信息。因而就存在样本的代表性、样本数量以及测试过程中的误差等问题。由于样本指标是随机变量,而且各指标是相互独立的,因此,可以用数理统计方法处理随机变量的误差。概率论是研究随机现象的一门科学,试验数据达到一定数量时大都服从一定形式的概率分布规律。数理统计的任务,就在于对试验数据进行误差分析,根据样本信息推断总体,在给定的显著性水平下,评价参数的可靠性和精确性。

主要特征值:

(1) 均值:反映随机变量中心倾向的一个指标,或称样本的一阶矩,又称为样本的均值或期望值。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (15)$$

式中, x_i —某一组(件)试验值, n —试验组(件)数。

(2) 方差:衡量指标的离散程度。

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad (16)$$

(3) 标准差:对方差的开方。

$$\sigma = \sqrt{S^2} \quad (17)$$

(4) 变异系数:以无量纲的值表述指标的离散性。

$$V = \sigma/\bar{x} \quad (18)$$

(5) 均值误差

$$Ms = \sigma/\sqrt{n-1} \quad (19)$$

(6) 标准误差

$$\sigma_s = \sigma/\sqrt{2n} \quad (20)$$

(7) 精确度指标

$$Px = V/\sqrt{n-1} \quad (21)$$

(8) 自相关系数

$$Rq = \left[\frac{1}{n-1} \sum (x_{i+1} - \bar{x})(x_i - \bar{x}) \right] / \sigma^2 \quad (22)$$

(12) 保证界限值,或称均值的区间估计值

$$x_p = \bar{x} \left(1 \pm \frac{t_\alpha \cdot V}{\sqrt{n-1}} \right) \\ = \bar{x} \pm \frac{t_\alpha \cdot \sigma}{\sqrt{n-1}} \quad (23)$$

式中, α —置信度(或显著性水平), t_α — t 分布参数,根据给定的 α 值查 t 分布表。本软件已设置了 $t_{\alpha/2} = 0.025$ 的值,无需查表。

3.2.2 f, c 的分布类型假设检验

由于子样观测值带有随机性,因此,统计累积概率分布函数 $F_n(x)$ 与某一可能拟合的理论分布函数 $F(x)$ 总是存在一定的差异。这种差异是否由于试验组数有限而导致随机误差而引起,还是由于我们选择的理论分布类型不妥而造成的?为此,必须对参数分布类型进行检验。现采用下列三种检验方法。

(1) 皮尔逊 χ^2 法

在数理统计中,通常用皮尔逊准则即 χ^2 法来检验一个样本是否来自某个拟合的推论总体。此法的原理是,如果子样观测值 x_1, x_2, \dots, x_n 服从所假设的理论分布 $F(x)$,将 n 个子样观测值分为 R 组, $J = 1, 2, \dots, R$,设子样观测值落在 J 组的个数(频数)为 C ,累积频数为 C_1 ,则经验频率为 $P_0 = C/n$ 。而按假设的理论分布(例如正态分布)为 $F(x)$,推算得到的落入 J 组的理论频数为 $C_2 = N \cdot P_K$,其中 P_K 为区间理论分布函数。根据皮尔逊定理,当 n 很大时,统计量服从自由度为 $R - k - 1$ 的 χ^2 分布。这里, R 为区间个数, k 为未知参数个数。若为正态分布, $F(x) = N(\mu, \sigma^2)$,则 $k = 2$ 。被称为差异度的 χ^2 以下式计算:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^R \frac{(C - NP_k)^2}{NP_k} \quad (24)$$

对于给定的显著性水平 α ,使得:

$$P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$$

式中: χ_α^2 可查概率论中 χ^2 分布表,如果由试验数据计算得到的 χ^2 的值小于 χ_α^2 的值,则接受原假设的理论分布,否则拒绝接受。此法要求子样至少分 5 组,每组至少有 5 个观测值,每组的理论频数不小于 5,即三个“5”的原则。

(2) 柯尔莫哥洛夫——斯米尔诺夫法(K-S法)

该法的基本思想是,由子样观测值组成的顺序样本算出的统计累积概率分布函数 $F_n(x)$ 与假设的理论概率分布函数 $F(x)$ 之差值 Dn 也是一个随机变量。找出其中的最大绝对值,与给定一个置信概率 $1 - \alpha$ 查表得出的检验值 Dn, α 相比较,来判断 $F_n(x)$ 是否

服从总体的分布,即:

$$Dn = \max |Fn(x) - F(x)| \quad (25)$$

式中, $F_n(x) = C_i/n$, 为观测值分布函数; $F(x)$ 为拟合的理论分布函数, 根据假设分布类型用有关公式计算。 Dn, α 由 n 及 α 查柯尔莫哥洛夫检验临界值表得出。如果 $Dn < Dn, \alpha$, 原假设正确, 则接受。如果 $Dn > Dn, \alpha$, 则拒绝原假设, 需另行假设重算。K-S 法最大优点是不受子样数量的限制, 精度较高, 比较适用于工程地质统计。

(3) A-D 法。A-D 法又叫 A^2 检验法。是由安德森 (Anderson) 和达林 (Darling) 于 1954 年提出的。同 K-S 法一样, A-D 也是基于子样经验分布函数 $F_n(x)$ 和理论分布函数 $F(x)$ 比较而得到检验结果的。即根据一个统计量 A_n^2 和相应的检验临界值 $A_{n, \alpha}^2$, 作比较以判断假定的分布是否被接受。

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln F(x_i) + \ln [1 - F(x_{n+1-i})] \} \quad (26)$$

在给定信度 α 下可查 A-D 法临界值表, 当 $A_n^2 < A_{n, \alpha}^2$ 时, 接受原假设; 当 $A_n^2 > A_{n, \alpha}^2$ 时, 拒绝接受原假设。由于当 n 达到 8 时, $A_{n, \alpha}^2$ 一般可达极限值的 94%, 因此 A-D 法对于小子样变量的检验识别性强、精度高, 特别适用于岩土工程。如果 χ^2 法、K-S 法和 A-D 法对所设理论分布都被接受, 则可用下式判别, 以选择拟合度 F_s 大值为最优模型:

$$F_s = 1 - \frac{D}{D_2}$$

式中, D — 假设理论分布统计量; D_2 — 该分布检验临界值; F_s — 拟合度

3.2.3 f, c 的超越概率

用统计方法求得 f, c 的特征值并不是一个定值, 在工程运行期间, f, c 仍然是一个随机变量, 在某种情况下实际指标可能大于或小于统计的均值, 对于岩体抗剪强度而言, 随机变量大于统计均值则是安全的, 而小于统计均值则是危险的, 因此, 在工程设计时, 使用统计均值有一定的风险, 我们要了解这种风险概率有多大, 是否在控制的范围以内, 风险概率也称之为超越概率。采用下式计算随机变量小于或等于均值的概率。

当随机变量服从正态分布:

$$P(X \leq \mu_b) = \Phi\left(\frac{\mu_b - \mu}{\sigma}\right) \quad (27)$$

当随机变量服从对数正态分布:

$$P(X \leq \mu_b) = \Phi\left(\frac{\ln \mu_b - \ln \mu}{\delta_{\ln x}}\right) \quad (28)$$

当随机变量服从极值 I 型分布:

$$P(X \leq \mu_b) = 1 - \exp\{-\exp[-1.283\left(\frac{\mu_b - \mu}{\sigma} + 0.45\right)]\} \quad (29)$$

式中, $P(X \leq \mu_b)$ — 随机变量小于或等于某统计值的概率即超越概率; μ, σ — 母体的均值和标准差; μ_b — 统计值。

$$\delta_{\ln x} = \sigma_{\ln x} / \mu_{\ln x}$$

式中, $\mu_{\ln x}, \sigma_{\ln x}, \delta_{\ln x}$ — 分别为在对数正态分布情况下的均值、标准差和变异系数。应当指出, 求 f, c 的超越概率关键是要知道母体的均值与标准差, 此值可从区域性的分类大量试验资料中统计得出。

3.2.4 绘制试验数据的直方图

为了直观的了解 f, c 的试验数据的分布情况, 本系统设定了绘制数据直方图及概率密度曲线、概率分布曲线的功能。从中可以比较经验分布与理论分布的差异。横坐标根据 f, c 的实测数据的范围值自动分成 5~6 组, 以每组中值的个数的百分比作为频率标于纵坐标上, 以实测数据为离散型随机变量绘制的直方图表示经验分布, 而理论分布则按连续型随机变量用正态分布来拟合, 其中包括概率密度函数曲线 f_A 和累积概率分布函数曲线 F_A 。

3.3 用 β 分布拟合期望值

对抗剪强度参数 f, c 期望值的拟合有三种方法, 即经验频率拟合, 正态分布拟合和 β 分布拟合。

(1) 经验频率拟合期望值

相当于加权平均。首先将数据分段, 计算每段频数和频率, 取分段中值与频率相乘然后累加就得出经验频率拟合的期望值。

$$F_c = \sum_{j=1}^k P_{1j} \cdot M_{kj} \quad (30)$$

式中, p_{1j} — 分段频率, $P_{1j} = C_j/n$, C_j — 分段样本数, k — 分段数, M_{kj} — 分段中值。

(2) 正态分布拟合期望值

$$F_A = \sum_{j=1}^k f(x) \cdot M_{kj} \quad (31)$$

而 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\delta}\right)^2\right]$

(3) β 分布拟合期望值

抗剪强度试验数据一般不在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间分布, 故用正态分布拟合, 可能夸大尾部概率。实际上, 观测或测试数据通常分布在一定范围内, 如最大

值为 b , 最小值为 a , 则在 $[a, b]$ 区间内用 β 分布的概率密度函数逼近实测数据, 可以得到较好的分布, 它比经验频率值要好。

β 分布的拟合值为 β 分布的概率密度函数乘以区间值, 即:

$$P'_j = f(x) \frac{b-a}{k}$$

$$= \frac{\Gamma(a+\beta)}{k\Gamma(a)\Gamma(\beta)} (b-a)^{2-a-\beta} (x-a)^{a-1} (b-x)^{\beta-1} \quad (32)$$

式中, k 为分段数, x 为分段中值 x'_j , $\Gamma(x)$ 为伽玛分布。

根据 β 分布拟合概率密度可以计算大率参数:

$$F_B = \sum_{j=1}^k P'_j \cdot x'_j \quad (33)$$

3.4 Monte Carlo 法随机模拟

所谓 Monte Carlo 法就是由统计过程所确定的物理状况在计算机上用随机数进行模拟。也就是用数值计算方法去模拟一个真实的过程。统计模拟的结果可以得到所需指标的估计值。此法的优点是可以进行大量的抽样试验, 以反映随机变量母体的特性。但这要在已取得岩土参数的理论概率分布模式及统计特征值以后, 通过计算机产生符合该分布在 $[0, 1]$ 区间内均匀分布的随机数, 称为伪随机数, 然后, 通过适当的变换, 以取得所求问题的大量试验值, 最后按前述方法求得统计特征值。经验证明, 岩土参数随机分布的理论概率模型一般都是连续性分布, 以下给出正态分布、对数正态分布、负指数分布和极值 I 型分布的 Monte Carlo 抽样公式:

1、正态分布

正态分布的概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad (34)$$

令 $Y = (x - \mu_x) / \sigma_x$, 可把任何形式正态函数转为标准正态, 采用中心极限定理得:

$$Y = \sum_{i=1}^k r_i - (k/2) / \sqrt{k/12}$$

式中, Y 是 $\mu_x = 0, \sigma_x = 1$ 的标准正态分布的随机变量; r_i 是 $[0, 1]$ 内均匀分布随机数的第 i 个元素; k 是所取 r_i 个数。当 k 很大时 Y 趋于真正的正态分布。一般应用中, k 取 12 已足够精确了。因此得:

$$Y = \sum_{i=1}^{12} r_i - 6$$

则 $X = Y \cdot \sigma_x + \mu_x$

由上式可产生具有均值 μ_x 、标准差 σ_x 的正态分布随机变量 x 。

2、对数正态分布

对数正态分布的概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \quad (35)$$

式中, $y_i = \ln x_i$; μ_y, σ_y 分别为 y 的均值和标准差。根据正态分布计算方法可推知对数正态分布的随机变量 x :

$$x = \exp \left[\mu_y + \sigma_y \left(\sum_{i=1}^{12} r_i - 6 \right) \right]$$

3、负指数分布

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (36)$$

则 $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$

令 $r = 1 - F(x)$

则 $x = -\ln \frac{r}{\lambda} = -E(x) \cdot \ln r$

即负指数分布随机变量 x , 取随机数 r 的自然对数乘以负的 x 的期望值。

4、极值 I 型分布

$$F(x) = \exp \{ -\exp [a(x - k)] \} \quad (37)$$

令 $r = F(x)$

则 $x = k - \frac{1}{a} \ln [-\ln (r)]$

式中, $a = 1.2825 / \sigma_x$; $k = \mu_x - 0.5772 / a$

3.5 Bayes 法则的运用

多年来在许多水利水电工程做了大量的现场抗剪试验, 积累了丰富的试验数据。但是, 对一个具体工程而言, 按照工程地质单元体进行统计, 则感到样本不足, 因而, 在确定设计采用的指标时又往往依赖于经验。但是, 经验又与人的阅历和资料掌握深度有关。我们认为, “经验” 应当建立在区域性大母体的大量统计资料的基础上, 按照一定的条件进行岩体分类或分级, 求得不同类别岩体的抗剪强度参数的经验频率。而每一个具体的工程又必须进行一定数量的现场试验, 这样, 我们可以把 “经验” 和 “试验” 结合起来。Bayes 方法正是这种结合的桥梁或称之为 “接口”。

Bayes 公式中的先验概率就是经验数据的概率分布, 它来自岩土工程的大母体 (全国的或区域性的), 样本数量多, 数据的可靠性较高。而某一工程地区试验数据是源于同一母体且在经验数据已知情况下得出的, 因此, 试验概率是条件概率。既然, 试验已经进行了, 则对于先验概率又必须重新估计; 这就是计算试验后的条件概率即后验概率。采用全概率公式:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^k P(B_j) \cdot P(A|B_j)} \quad (38)$$

式中, $P(B_i)$ —先验概率; $P(A|B_i)$ —试验概率; $P(B_i|A)$ —后验概率; 分母为全概率。根据后验概率即可求出具有大概率的抗剪强度参数, 称之为 Bayes 参数值:

$$\mu_b = \sum_{j=1}^k P(B_j|A) \cdot f_j$$

式中: μ_b —Bayes 值; f_j —分段频率中间值; k —数据分段数。

当抗剪强度参数服从正态分布, 其均值 μ 及标准差 σ 服从 Γ 分布。当子样 $n_i \geq 6$ 时, 按下式计算后验分布参数。

$$\mu = (n_1\mu_1 + n_0\mu_0)/(n_1 + n_0)$$

$$S = \frac{1}{n-1} \{ [n_0\mu_0^2 + (n_0-1)S_0] + [(n_1-1)S_1 + n_1\mu_1^2] - n\mu^2 \}$$

$$\sigma = S \cdot \sqrt{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{\Gamma[(n-2)/2]}{\Gamma[(n-1)/2]}}$$

式中, μ_0, S_0, n_0 —母体均值、方差与样本数, μ_1, S_1, n_1 —单元体均值、方差、样本数, μ, S, σ, n —后验参数的均值、方差、标准差与样本数, $n = n_0 + n_1, \Gamma(\cdot)$ —伽码函数。

4 取值

4.1 f, c 的联合分布及概率取值

对于一对相关的变量, 我们可以用二元随机变量的联合分布来拟合试验数据。前已述及, f, c 是一组抗剪试验数据经库仑方程整理出来的具有高度相关性的两个参数, 而它的数值都是在定一的区间 $[a, b]$ 范围内, 因此用 β 分布进行拟合较为合适。 β 分布的概率密度函数为:

$$f_{u,v}(u,v) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 3)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\gamma + 1)} \times u^\alpha v^\beta (1-u-v)^\gamma \quad (39)$$

$$(u, v \geq 0, 0 \leq u+v \leq 1, \alpha, \beta, \gamma > -1)$$

式中, u 和 v 相应于变量 c, f 的无量纲参数, 即 c, f 的标准化变量; $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数; α, β, γ 为尺度参数, 其计算式为:

$$\alpha(\beta + 1)(\bar{u}/\bar{v}) - 1$$

$$\beta = -[\bar{u}\bar{v}^2/(\gamma_{u,v} \cdot \sigma_u \cdot \sigma_v)] - \bar{v} - 1$$

$$\gamma = (\beta + 1)\bar{v} - (\alpha + \beta + 3)$$

$$\text{式中, } \bar{u} = \frac{1}{2} \frac{\bar{C} - C_{min}}{C_{max} - C_{min}}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \frac{\bar{f} - f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sigma_c^2}{4(C_{max} - C_{min})}}$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sigma_f^2}{4(f_{max} - f_{min})}}$$

式中, \bar{c}, \bar{f} 为 c, f 指标的均值; $C_{max}, C_{min}, f_{max}, f_{min}$ 分别为 c, f 指标的上限和下限值; $\gamma_{u,v} = \gamma_{c,f}$ 为 c 与 f 的相关系数。

在求得联合 β 分布的概率密度函数之后, 可利用累积联合分布计算某一置信水平的 u_0 和 v_0 的估值, 或在指定了估值 u_0 和 v_0 之后可计算随机变量 u 和 v 小于 u_0 和 v_0 的概率, 即:

$$F_{u,v}(u_0, v_0) = P[u \leq u_0, v \leq v_0]$$

其值定义为:

$$F_{u,v}(u_0, v_0) = \int_{u_{min}}^{u_0} \int_{v_{min}}^{v_0} f_{u,v}(u_0, v_0) d_u d_v \quad (40)$$

一个工程地质单元体内若干组现场抗剪断试验成果, 按最小二乘法进行综合统计, 得出 c, f 的均值 \bar{c}, \bar{f} 作为 u_0 和 v_0 的估值代入以上诸式计算, 求得累积联合分布 $F_{u,v}(u_0, v_0)$, 它表示随机变量 u 和 v 小于 u_0 和 v_0 的概率, 称为超越概率或风险概率, 它以 p_f 表示, 定义可靠度 $p_r = 1 - p_f$, 则:

$$p_r = 1 - F_{u,v}(u_0, v_0) \quad (41)$$

如果计算的可靠度 p_r 值太低, 达不到规定的目标值 (p_r), 则可以降低 c 和 f 值, 例如将均值减去一定倍数的标准差得出“标准值”作为新的 u_0 和 v_0 的估值重复上述计算, 计算结果如 $p_r > p_r$, 则计算终止, 如 $p_r < p_r$, 则可改变 α 取值重新计算, 直到满足工程上按不同设计阶段对单项参数目标可靠度指标的要求, 此时的 c, f 值即为所求, 它具有明确的概率含义。标准值按下式计算:

$$c_k = \bar{c} - k_p \cdot \sigma_c$$

$$f_k = \bar{f} - k_p \cdot \sigma_f$$

式中, k_p —与概率有关的系数, 如取显著水平 $\alpha = 0.20$ 分位数时, 则 $k_p = 0.842$, 如取 $\alpha = 0.15$, 则 $k_p = 1.036$ 。最后计算置信概率 c :

$$c = 1 - \exp(N \cdot \ln p_r) \quad (42)$$

4.2 抗剪强度参数的标准值与设计值

岩土工程采用可靠度设计方法优于定值法设计, 因为它考虑了设计参数的变异性, 用概率度量工程的安全度。因此, 统计值不能直接进入设计。必须取概率分位数对统计值予以拆减变为标准值, 再除以分项才成为设计值。如图1所示。

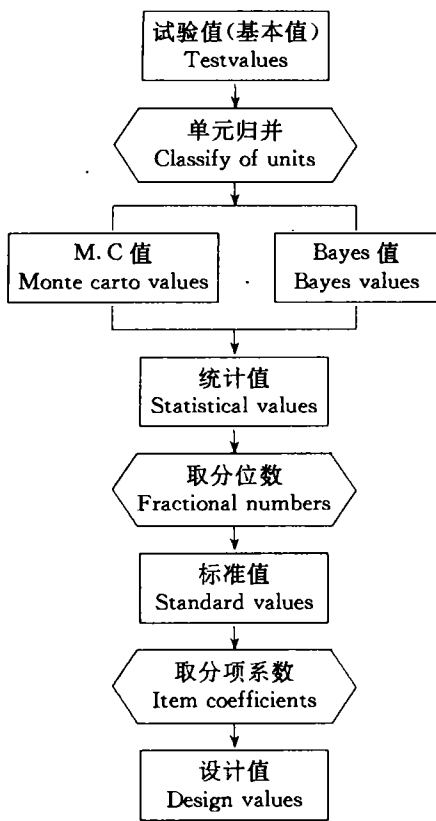


图1 岩土工程参数取值过程

Fig. 1 The process of fetching parameters in Rock engineering

(1) 标准值

当随机变量(f, c)服从正态分布:

$$f_k = \mu_f + K_2 \sigma_f \quad (43)$$

当随机变量(f, c)服从对数正态分布:

表1 若干水电站坝基混凝土/岩石抗剪断参数

Table 1 Parameters of concrete of ban base and Rock in some hydroelectric power stations

工程 Engineering	坝基岩石 Rock of dam foundation	试验组 数 Test groups	统计值 Statistical values						标准值 Standard values						
			f			C			相关系数 Correlation coefficient $\gamma_{f,c}$	可靠度 Reliable degree P_{r1}	置信概率 Credible probability C_1	摩擦 系数 Coefficient of friction f_k	凝聚力 Cohesion force c_k	可靠度 Reliable degree P_{r2}	置信 概率 Credible probability C_2'
			均值 Average values \bar{f}	标准差 Standard deviation σ_f'	变异系数 Coefficient variation δ_f'	均值 Average values \bar{C}	标准差 Standard deviation σ_c'	变异系数 Coefficient variation δ_c'							
岩滩 Yantan	辉绿岩 Gabbro	10	1.11	0.19	0.17	1.10	0.32	0.29	-0.86	0.70	0.97	0.95	0.83	0.85	0.81
水口 Shuikou	花岗岩 Granite	25	1.47	0.29	0.20	1.18	0.36	0.31	-0.82	0.70	0.99	1.23	0.88	0.80	0.99
长洲 Changzhou	花岗岩 Granite	7	1.04	0.15	0.14	0.77	0.13	0.17	-0.89	0.79	0.81	0.91	0.66	0.87	0.61
马骊滩 Maliutan	石灰岩 Limestone	8	0.93	0.06	0.06	1.73	0.22	0.13	-0.92	0.69	0.95	0.88	1.54	0.86	0.70
安康 Ankan	千枚岩 Schist	9	0.92	0.23	0.25	1.37	0.38	0.28	-0.86	0.75	0.92	0.73	1.05	0.87	0.71
紫荆关 Zijingguan	花岗岩 Granite	7	1.15	0.11	0.10	0.99	0.18	0.18	-0.77	0.66	0.95	1.06	0.84	0.86	0.65
潘家口 Panjiakou	石英片岩 Quartzite	14	1.71	0.17	0.10	0.62	0.22	0.35	-0.91	0.68	0.99	1.56	0.44	0.83	0.93

$$f_k = \frac{\mu_f}{\sqrt{1 + \delta_f^2}} \exp[K_2 \sqrt{\ln(1 + \delta_f^2)}] \quad (44)$$

式中, K_2 —与概率有关的系数, 当取概率为 0.05 的分位值时, $K_2 = -1.645$; 当取概率为 0.2 的分位值时, $K_2 = -0.84$, 当取概率 0.5 分位值时, $K_2 = 0$, μ_f —均值, σ_f —标准差, δ_f —变异系数。

(2) 设计值

$$f_d = f_k / r_f \quad (45)$$

正态分布: $r_f = \frac{1 + K_2 \delta_f}{1 + K_1 \delta_f}$

对数态分布: $r_f = \frac{1}{\exp[(K_1 - K_2) \delta_f]}$

式中, f_d —设计值; f_k —标准值, r_f —分项系数; $K_1 = \Phi^{-1}(af_1)$; $K_2 = \Phi^{-1}(af_2)$; af_1 —参数设计值在其概率分布上的分位值, 当 $af_1 = 0.02275$, 则 $K_1 = -2$, af_2 —参数标准值在其概率分布上的分位值, 当 $af_2 = 0.05$, 则 $K_2 = -1.645$, 当 $af_2 = 0.2$, 则 $K_2 = -0.84$ 。

5 应用实例

国内若干大型水电站坝基混凝土/岩石现场抗剪断试验成果, 按本文所提供的软件进行系统的整理, 省去繁琐的计算过程, 得出主要的综合指标列于表1。

该表显示, 只有岩滩、水口和潘家口三个工程 f 、 c 值的可靠度和置信概率能满足设计要求, 因此可以标准值进入设计, 其他工程的参数置信度较低, 显然,

(下转第76页 Continue on page 76)

要求。

4.4 抽水蓄能电站汛期替代火电机组调峰时,使火电机组少压负荷,并稳定在高效率运行,从而增加火电机组发电利用小时数,使设备充分发挥作用,提高设备利用率和降低火电运行费率。

4.5 当电网或某电站发生事故时,抽水蓄能电站即时发出可靠的足够出力,防止电网产生过大振荡的事故,提高电网供电的安全可靠性。

5 结语

5.1 抽水蓄能电站在电网中的作用和效益是十分显著的,它是电网中重要组成部分,配置抽水蓄能电站是电网结构的需要,也是电网最有利的组合,抽水蓄能电站投入电网运行后,电网中其它电站就变得比较稳定,电能质量也得到保证。由于峰谷差缩小,拉闸限电的机率也相对减少,从而保证了工农业用电和人民生活用电。

5.2 抽水蓄能电站无废水、废气、废渣排放,对水质、大气无污染,与火电比较,有明显的环境效益。

5.3 近年来,由于我区城乡用电量持续猛增,电网

调峰的矛盾越来越突出,抽水蓄能电站在电网中的作用和效益已开始被人们认识和重视,对兴建抽水蓄能电站的必要性已从能源发展战略和电力工业发展战略高度来认识,特别是现在大江大河上已经很难找到兴建大型水库电站的坝址(受水库淹没制约),这样就更增加了兴建抽水蓄能电站的必要性。

5.4 广西已经开展了抽水蓄能电站站址的普查和选点规划工作。今年9月将在南京召开抽水蓄能国际学术讨论会,当前我国对抽水蓄能已面临一个的发展时期,抓住这一有利时机,组织勘测设计力量,加强普查、规划与选点,因地制宜,在发展高水头大容量抽水蓄能电站的同时,结合我区实际,发展中型抽水蓄能电站,以满足地方经济发展的需要。

5.5 国外抽水蓄能是从日调节开始的,近年来工业发达国家已逐步开发周调节或季调节。日调节抽水蓄能电站只解决一日之内的调峰、填谷,却无法解决汛期季节性电能的储存,考虑到广西电网是以水电为主汛期电能多的特殊情况,建议在开发日调节抽水蓄能电站的同时,尽可能优先开发季(年)调节的抽水蓄能电站。

(责任编辑:梁积全、莫鼎新)

(上接第72页 Continue from page 72)

这与它们的样本不足有关。其改进方法之一是增加试验样本容量,或者适当提高概率分位数,重新进行计算,从而再一次降低标准值提供设计应用。此时,可靠度虽有所降低,但置信概率却增大了。

6 结语

与人类工程活动有关的岩石高边坡,在自然界中是大量存在的。特别是在水利水电、铁道、矿山建设中,基坑和边坡的大量开挖或水库蓄水等环境变化,都可能破坏原始应力平衡状态,因此,需要经常进行边坡稳定性分析。按照极限平衡理论分析边坡稳定的关键是确定滑动的边界条件和提供合理的滑动面抗剪参数 f 、 c 值。考虑到 f 、 c 值的不确定性,本文系统的研究了 f 、 c 值的统计和取值方法,其技术关键点是如何处理数据的误差和采用联合分布作概率取值,并与结构可靠度设计方法联系起来,从而把抗剪强度参数

的研究提高到一个新的水平。

参考文献

- 1 沈恒范. 概率论讲义. 人民教育出版社, 1983.
- 2 Smith G H. (1986), 曹焱康等译, 土木工程实用概率和统计. 同济大学出版社, 1988.
- 3 吴世伟. 结构可靠度分析. 人民交通出版社, 1990.
- 4 A. H-S. ANG, W. H. TANG, 工程规划设计中的概率概念. 冶金工业出版社, 1985.
- 5 光耀华. 坝基岩石抗剪断参数的统计特征. 岩石力学与工程学报, 1989, 8 (2): 151~162.
- 6 光耀华. 岩石力学参数概率统计的几个问题. 第七届国际工程地质大会论文集, 1994, 2: 415~420.
- 7 光耀华. 岩石抗剪强度指标的概率分析. 中国岩石力学与工程学会第三次大会论文集, 中国科学技术出版社, 1994.
- 8 中国科学院数学研究所. 回归分析方法. 科学出版社, 1975.

(责任编辑:梁积全、何启彬、莫鼎新)